CHAPITRE I : RACINE CARREE

I. Définition et notation :

Activité :

Donner le carré de chacun des nombres suivants : 3 ; 0,5 ; 7 ; 5.

Réponse :

Donnons le carré des nombres.

$3^2 = 3 \times 3 = 9$; $0.5^2 = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$; $7^2 = 7 \times 7 = 49$; $5^2 = 5 \times 5 = 25$

Le nombre positif 5 dont le carré est 25, est appelé **la racine carrée de 25.**

Donc : la racine carrée de 25 est égale à 5 ; la racine carrée de 0,25 est égale à 0,5.

I.1 Définition :

Soit **a** un nombre rationnel positif ou nul. On appelle **racine carrée** de **a**, le nombre positif ou nul dont le carré est égal à **a.**

I.2 Notation :

On note **la racine carrée** de **a** par $\sqrt{a}$,

- le symbole $\sqrt{\ }$ est appelé le **radical,**
- **le réel a** est appelé le **radicande.**

Exemples :

$\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{100} = 10$; $\sqrt{81} = 9$; $\sqrt{36} = 6$ et $\sqrt{4900} = 70$

I.3 Conséquences :

1. Soient a et b deux nombres positifs, si $\sqrt{a} = b$ alors $a = b^2$.

Exemples :

si $\sqrt{25} = 5$ alors $5^2 = 25$; si $\sqrt{121} = 11$ alors $11^2 = 121$;

2. Soient a et b deux nombres positifs ou nul, si $a^2 = b^2$ alors $a = b$.

3. Soit a un nombre positif ou nul, on a : $\sqrt{a} \geq 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$.

Exemples :

$\sqrt{3} \geq 0$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$; $(\sqrt{5})^2 = 5$.

Exercice d'application :

Calculer les réels suivants :

$a)\ (\sqrt{3})^2 ; (\sqrt{7})^2 ; (\sqrt{0{,}4})^2$

$b)\ \sqrt{2} \times \sqrt{2} ; \sqrt{0{,}3} \times \sqrt{0{,}3} ; \sqrt{100} \times \sqrt{100}$

Corrigé :

$a)\ (\sqrt{3})^2 = 3 ; (\sqrt{7})^2 = 7 ; (\sqrt{0{,}4})^2 = 0{,}4$;

$b)\ \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 ; \sqrt{0{,}3} \times \sqrt{0{,}3} = 0{,}3 ; \sqrt{100} \times \sqrt{100} = 100$

II. Nombres irrationnels ; Ensemble des réels IR :

II.1 Nombres irrationnels :

A l'aide d'une calculatrice on a :$\sqrt{2} = 1{,}414213624$ .... (Suite illimitée non périodique) est un nombres irrationnel, donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ car ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$.

Définition :

Un nombre est dit irrationnel s'il ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$.

Exemples :

$\pi = 3{,}1415926538$........;$\sqrt{3} = 1{,}7320508$......... ; $\frac{22}{7} = 3{,}14285714285$........... sont des nombres qui n'appartiennent pas à l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$

II.2 Ensemble des réels IR :

Définition :

Les nombres **rationnels** et les nombres **irrationnels** forment l'ensemble des réels noté **IR.**

Exemple :

$\frac{2}{7}; -5; 12; \sqrt{5}; -\sqrt{11}; 2+\sqrt{3}$ sont des nombres réels.

- L'ensemble des nombres réels positifs est noté $\mathbb{R}_+$: $[\mathbf{0}; +\infty[$
- L'ensemble des nombres réels négatifs est noté $\mathbb{R}_-$: $]-\infty; \mathbf{0}]$
- L'ensemble des nombres réels non nuls est noté $\mathbb{R}^*$: $]-\infty; \mathbf{0}[\cup]\mathbf{0}; +\infty[$
- L'ensemble des nombres réels positifs non nuls est noté $\mathbb{R}_+{}^*$: $]\mathbf{0}; +\infty[$
- L'ensemble des nombres réels négatifs non nuls est noté $\mathbb{R}_-{}^*$: $]-\infty; \mathbf{0}[$

Remarque :

Avec la relation d'inclusion $\subset$, les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, , \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sont ainsi ordonnés :

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

Exercice d'application :

Recopie et complète par $\in$ ou $\notin$

$\sqrt{8} \ldots\ldots \mathbb{R}$; $\pi \ldots\ldots \mathbb{Q}$; $\sqrt{0{,}09} \ldots\ldots \mathbb{R}^*$

Corrigé:

$\sqrt{8} \in \mathbb{R}$; $\pi \notin \mathbb{Q}$; $\sqrt{0{,}09} \in \mathbb{R}^*$

II. Operations et Racines Carrées

III.1 Produit et racines carrées :

Activité :

Soient les nombres $x = \sqrt{4 \times 25}$; $y = \sqrt{4} \times \sqrt{25}$.

A l'aide d'une calculatrice, calculer x et y puis compare les résultats.

Réponse :

$x = \sqrt{4 \times 25} = \sqrt{100} = 10$; $y = \sqrt{4} \times \sqrt{25} = 2 \times 5 = 10$. Donc $\boldsymbol{x = y}$

Propriété :

La racine carrée du produit de deux nombres réels positifs est égale au produit des racines de ces deux réels.

Autrement dit : Soient a et b des nombres positifs, on a : $\boldsymbol{\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}}$

Démonstration :

Soient a et b deux nombres positifs, on a :

- $(\sqrt{a})^2 = a$ et $(\sqrt{b})^2 = b$
- $(\sqrt{ab})^2 = ab$ et $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b = ab$
- Alors $(\sqrt{ab})^2 = (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2$ d'où $\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}}$

Exemples :

$\sqrt{15} = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{3} \times \sqrt{5}$; $\sqrt{21} = \sqrt{3 \times 7} = \sqrt{3} \times \sqrt{7}$

Remarque :

Si $a < 0$ et $b < 0$; on a : $ab > 0$ alors $\boldsymbol{\sqrt{ab}}$ existe mais on ne peut pas parler ni de $\boldsymbol{\sqrt{a}}$ ni de $\boldsymbol{\sqrt{b}}$ alors et $\boldsymbol{\sqrt{a} \times \sqrt{b}}$ n'existe pas.

Exemple :

$\sqrt{-3}$ et $\sqrt{-5}$ n'existent pas dans $\mathbb{R}$, mais $\sqrt{(-3) \times (-5)} = \sqrt{10}$ existe car $(-3) \times (-5) = 10$

Donc $\sqrt{(-3) \times (-5)} \neq \sqrt{(-3)} \times \sqrt{(-5)}$

Exercice d'application :

Ecris chaque nombre ci-dessous sans le symbole √.

$\sqrt{49 \times 100}$; $\sqrt{25 \times 16}$; $\sqrt{12} \times \sqrt{3}$; $\sqrt{2} \times \sqrt{32}$; $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$; $\sqrt{3} \times \sqrt{27}$; $2\sqrt{7} \times 5\sqrt{28}$.

Corrigé :

$\sqrt{49 \times 100} = \sqrt{49} \times \sqrt{100} = 7 \times 10 = 70$; $\sqrt{25 \times 16} = \sqrt{25} \times \sqrt{16} = 5 \times 4 = 20$;

$\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{12 \times 3} = \sqrt{36} = 6$ $\sqrt{2} \times \sqrt{32} = \sqrt{2 \times 32} = \sqrt{64} = 8$; $\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = 4$

$\sqrt{3}\times\sqrt{27}=\sqrt{81}=9$; $2\sqrt{7}\times 5\sqrt{28}=10\sqrt{196}=10\times 14=140$

III.2 Quotient et racines carrées :

Activité :

Soient les nombres $z=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}}$ et $w=\sqrt{\frac{16}{49}}$.

A l'aide d'une calculatrice, calculer z et w puis compare les résultats.

Réponse :

$z=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}}=\frac{4}{7}$ et $w=\sqrt{\frac{16}{49}}=\frac{4}{7}$. Donc $z=w$

Propriété :

Le quotient des racines carrées de deux nombres réels positifs est égal à la racine carrée du quotient de ces deux réels.
Autrement dit : Soient a et b des nombres positifs avec b $\neq 0$, on a : $\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$
En particulier : $\boxed{\sqrt{\frac{1}{b}}=\frac{1}{\sqrt{b}}}$

Démonstration :

Soient a et b deux nombre positifs (b $\neq 0$), on a :

$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2=\frac{a}{b}$; $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b}$ alors $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$ donc $\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$

Exemples :

Simplifier les nombres suivants : $\sqrt{\frac{36}{9}}$; $\sqrt{\frac{25}{16}}$; $\frac{\sqrt{117}}{\sqrt{13}}$; $\frac{\sqrt{245}}{\sqrt{5}}$

Corrigé :

$\sqrt{\frac{36}{9}}=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}}=\frac{6}{3}$; $\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}}=\frac{5}{4}$; $\frac{\sqrt{117}}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13\times 9}}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{9}\times\sqrt{13}}{\sqrt{13}}=3$; $\frac{\sqrt{245}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{49\times 5}}{5}=\frac{\sqrt{49}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=7$

Exercice d'application :

a) Simplifier les nombres suivants : $\sqrt{\frac{121}{25}}$; $\sqrt{\frac{81}{100}}$; $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ et $\sqrt{\frac{49\times 16}{25}}$

b) Démontrer que $\frac{5\sqrt{72}}{2\sqrt{2}}$ est un entier.

Corrigé :

a) $\sqrt{\frac{121}{25}}=\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{25}}=\frac{11}{5}$; $\sqrt{\frac{81}{100}}=\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{100}}=\frac{9}{10}$; $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{9\times 3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{9}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=3$; $\sqrt{\frac{49\times 16}{25}}=\frac{\sqrt{49}\times\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=\frac{7\times 4}{5}=\frac{28}{5}$

b) $\frac{5\sqrt{72}}{2\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{36}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{5\times 6\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{5\times 3\times 2\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=15$ est un entier.

Ecrire $\sqrt{x}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a $\in\mathbb{N}$:

Pour mettre $\sqrt{x}$ sous forme de $a\sqrt{b}$ avec a $\in\mathbb{N}$, il faut décomposer x en produit de facteur premier.

Exemple :

Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$; b étant le plus petit entier possible des réels suivants :

$A=\sqrt{8}$; $B=\sqrt{18}$; $C=\sqrt{80}$; $D=\sqrt{27}$; $E=\sqrt{50}$ et $F=\sqrt{24}$

Réponse :

$A=\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=\sqrt{4}\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ $\quad$ $B=\sqrt{18}=\sqrt{9\times 2}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

$C=\sqrt{80}=\sqrt{16\times 5}=\sqrt{16}\times\sqrt{5}=4\sqrt{5}$ $\quad$ $D=\sqrt{27}=\sqrt{9\times 3}=\sqrt{9}\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

$E=\sqrt{50}=\sqrt{25\times 2}=\sqrt{25}\times\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ $\quad$ $F=\sqrt{24}=\sqrt{4\times 6}=\sqrt{4}\times\sqrt{6}=2\sqrt{6}$

III.3 Somme et racines carrées:

Activité :

1) Compare $\sqrt{16+9}$ *et* $\sqrt{16}+\sqrt{9}$.

2) Soit a et b des réels positifs. Montre que $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Réponse :

1) Compare $\sqrt{16+9}$ *et* $\sqrt{16}+\sqrt{9}$.

$\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ et $\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$ Donc $\sqrt{16+9}\neq\sqrt{16}+\sqrt{9}$

2) Soit a et b des réels positifs. Montre que $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

$\left(\sqrt{a+b}\right)^2=a+b$ et $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+2\sqrt{ab}+b$ donc $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

Propriété :

a et b étant des nombres positifs, on a : $\sqrt{\mathbf{a+b}}\neq\sqrt{\mathbf{a}}+\sqrt{\mathbf{b}}$ **et** $\sqrt{\mathbf{a-b}}\neq\sqrt{\mathbf{a}}-\sqrt{\mathbf{b}}$ **.**

Propriété :

a, b, et c étant des nombres positifs, on a : $\boxed{\mathbf{b\sqrt{a}+c\sqrt{a}=(b+c)\sqrt{a}}}$; $\boxed{\mathbf{b\sqrt{a}-c\sqrt{a}=(b-c)\sqrt{a}}}$

Exemples:

Réduire les sommes suivantes : $A=2\sqrt{2}+\sqrt{2}+8\sqrt{2}$; $B=3\sqrt{5}-4\sqrt{5}-\sqrt{5}$

Corrigé :

$A=2\sqrt{2}+\sqrt{2}+8\sqrt{2}=(2+1+8)\sqrt{2}=11\sqrt{2}$; $B=3\sqrt{5}-4\sqrt{5}-\sqrt{5}=(3-4-1)\sqrt{5}=-2\sqrt{5}$

III.4 Puissance et racines carrées :

Propriété :

a étant un réel positif et n un nombre entier relatif on a : $\sqrt{a^{2n}}=a^n$ $\sqrt{a^{2n+1}}=a^n\times\sqrt{a}$

Exemple :

Complète les pointillés par les nombres qui conviennent.

$\sqrt{3^8}=\sqrt{3^{2\times\dots}}=3^{\cdots}$; $\sqrt{7^{11}}=\sqrt{7^{2\times\dots+1}}=7^{\cdots}\sqrt{7}$

Corrigé :

$\sqrt{3^8}=\sqrt{3^{2\times\mathbf{4}}}=3^{\mathbf{4}}$; $\sqrt{7^{11}}=\sqrt{7^{2\times\mathbf{5}+1}}=7^{\mathbf{5}}\sqrt{7}$

Exercice d'application :

Simplifier les opérations suivantes : $A=\sqrt{3^{68}}$; $B=\sqrt{10^7}$; $C=\sqrt{2^{17}}$ et $D=\sqrt{125}$

Corrigé :

$A=\sqrt{3^{68}}=\sqrt{3^{2\times34}}=3^{34}$ $B=\sqrt{10^7}=\sqrt{10^{(2\times3)+1}}=10^3\sqrt{10}$;

$C=\sqrt{2^{17}}=\sqrt{2^{2\times8+1}}=2^8\sqrt{2}$ $D=\sqrt{125}=\sqrt{5^3}=\sqrt{5^{2+1}}=5\sqrt{5}$

IV. Calcul sur les radicaux :

IV.1 Somme algébrique :

Exemple :

Effectuer les opérations suivantes :

$A=3\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}$; $B=3\sqrt{11}-\left(4\sqrt{11}-2\sqrt{2}\right)+5\sqrt{2}$; $C=(7\sqrt{7}+4\sqrt{5})-\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{7}\right)$

$D=\sqrt{18}+2\sqrt{50}+3\sqrt{18}$; $E=\sqrt{27}-\sqrt{3}-\sqrt{12}$ et $F=\sqrt{5}\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{15}\right)$

Corrigé :

$A=3\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}=(3+1)\sqrt{3}-\sqrt{2}$ $\boxed{\mathbf{A=4\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$

$B=3\sqrt{11}-\left(4\sqrt{11}-2\sqrt{2}\right)+5\sqrt{2}=3\sqrt{11}-4\sqrt{11}+2\sqrt{2}+5\sqrt{2}$ $\boxed{\mathbf{B=-\sqrt{11}+7\sqrt{2}}}$

$C=\left(7\sqrt{7}+4\sqrt{5}\right)-\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{7}\right)=7\sqrt{7}+4\sqrt{5}-2\sqrt{5}-3\sqrt{7}=7\sqrt{7}-3\sqrt{7}+4\sqrt{5}-2\sqrt{5}$

$\boxed{\boldsymbol{C=4\sqrt{7}+2\sqrt{5}}}$

$D=\sqrt{18}+2\sqrt{50}+3\sqrt{18}=2\sqrt{50}+4\sqrt{18}=2\sqrt{25\times2}+4\sqrt{9\times2}=2\times5\sqrt{2}+4\times3\sqrt{2}$

$\boxed{\boldsymbol{D=10\sqrt{2}+12\sqrt{2}=22\sqrt{2}}}$

$E=\sqrt{27}-\sqrt{3}-\sqrt{12}=\sqrt{9\times3}-\sqrt{3}-\sqrt{4\times3}=3\sqrt{3}-\sqrt{3}-2\sqrt{3}=3\sqrt{3}-3\sqrt{3}$ $\boxed{\mathbf{E=0}}$

$F=\sqrt{5}\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{15}\right)=2\sqrt{25}+3\sqrt{75}=2\times5+3\times5\sqrt{3}=10+15\sqrt{3}$ $\boxed{\mathbf{F=10+15\sqrt{3}}}$

IV.2 Utilisation des égalités remarquable :

Exemple :

Développer les expressions suivantes :

$A=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$; $B=\left(2\sqrt{5}+3\right)^2$; $C=\left(\sqrt{7}+5\sqrt{3}\right)^2$; $D=\left(4-2\sqrt{3}\right)^2$; $E=\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2$;

$F=\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$; $G=\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)$; $H=\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{6}\right)\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{6}\right)$

Corrigé :

$A = (2+\sqrt{3})^2 = (2)^2 + 2\times2\times\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3$ $\boxed{A = 7 + 4\sqrt{3}}$

$B = (2\sqrt{5}+3)^2 = (2\sqrt{5})^2 + 2\times2\sqrt{5}\times3 + (3)^2 = 4\times5 + 12\sqrt{5} + 9$ $\boxed{B = 29 + 12\sqrt{5}}$

$C = (\sqrt{7}+5\sqrt{3})^2 = (\sqrt{7})^2 + 2\times\sqrt{7}\times5\sqrt{3} + (5\sqrt{3})^2 = 7 + 10\sqrt{21} + 75$ $\boxed{C = 82 + 10\sqrt{21}}$

$D = (4-2\sqrt{3})^2 = (4)^2 - 2\times4\times2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2 = 16 - 16\sqrt{3} + 4\times3$ $\boxed{D = 28 - 16\sqrt{3}}$

$E = (3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2 = (3\sqrt{2})^2 + 2\times3\sqrt{2}\times2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2 = 9\times2 + 12\sqrt{6} + 4\times3$ $\boxed{E = 30 + 12\sqrt{6}}$

$F = (\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 = 3 - 5$ $\boxed{F = -2}$

$G = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = (2)^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3$ $\boxed{G = 1}$

$H = (3\sqrt{2}+2\sqrt{6})(3\sqrt{2}-2\sqrt{6}) = (3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{6})^2 = 9\times2 - 4\times6$ $\boxed{H = -6}$

IV.3 Expression conjuguées – Rendre rationnel le dénominateur d'un quotient:

1. Expressions conjuguées :

Activité :

Développer et réduire les nombres réels :

$m = (7-\sqrt{2})(7+\sqrt{2})$ et $n = (2-5\sqrt{3})(2+5\sqrt{3})$

Corrigé :

Développe et réduis les nombres réels :

$m = (7-\sqrt{2})(7+\sqrt{2})$	$n = (2-5\sqrt{3})(2+5\sqrt{3})$
$m = (7)^2 - (\sqrt{2})^2$	$n = (2)^2 - (5\sqrt{3})^2$
$m = 49 - 2$	$n = 4 - 75$
$m = 47$	$n = -71$

Les produits $m = (7-\sqrt{2})(7+\sqrt{2})$ et $n = (2-5\sqrt{3})(2+5\sqrt{3})$ peuvent s'écrire sans radical.

On dit que :

- $(7-\sqrt{2})$ et $(7+\sqrt{2})$ sont des expressions conjuguées.
- $(2-5\sqrt{3})$ et $(2+5\sqrt{3})$ sont également des expressions conjuguées.

Règle :

a et b étant des réels avec b positif, $\sqrt{a}+b$ et $\sqrt{a}-b$ sont des expressions conjuguées car leur produit peut s'écrire sans radical.

2. Rendre rationnel un dénominateur :

Définition :

Rendre rationnel un dénominateur c'est écrire le quotient sans le radical ($\sqrt{}$) au dénominateur.

Règle :

Pour rendre rationnel le dénominateur d'un quotient contenant un radical, on multiplie le numérateur et dénominateur par **l'expression conjuguée du dénominateur.**

❖ **Méthodes d'écriture d'un quotient sans radical au dénominateur**

• Pour écrire un quotient de la forme $\frac{a}{\sqrt{b}}$ sans radical au dénominateur, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{b}$.

Exemples :

Ecrivons $\frac{3}{\sqrt{7}}$ et $\frac{2}{\sqrt{3}}$ sans radical au dénominateur.

Corrigé :

$\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$ et $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

• Pour écrire un quotient de la forme $\frac{a}{b+c\sqrt{d}}$ sans radical au dénominateur, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $b - c\sqrt{d}$.

Exemples :

Ecrivons $\frac{3}{3+\sqrt{5}}$ et $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ sans radical au dénominateur.

Corrigé :

On a : $\frac{3}{3+\sqrt{5}} = \frac{3\times(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \frac{9-3\sqrt{5}}{9-5} = \frac{9-3\sqrt{5}}{4}$;

$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{3})}{5-3} = \frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$

Exercice d'application :

Rendre rationnel les quotients suivants : $\frac{5}{\sqrt{6}}$; $\frac{2}{\sqrt{3}}$; $\frac{3}{2+\sqrt{3}}$; ; $\frac{2}{1-\sqrt{5}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; $\frac{3}{2\sqrt{3}-5\sqrt{2}}$

Corrigé :

- $\frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$;
- $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$;
- $\frac{3}{2+\sqrt{3}} = \frac{3\times(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{6-3\sqrt{3}}{4-3} = \frac{6-3\sqrt{3}}{1} = 6-3\sqrt{3}$;
- $\frac{2}{1-\sqrt{5}} = \frac{2\times(1+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2+2\sqrt{5}}{1-5} = \frac{2+2\sqrt{5}}{-4} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
- $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$
- $\frac{3}{2\sqrt{3}-5\sqrt{2}} = \frac{3(2\sqrt{3}+5\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}-5\sqrt{2})(2\sqrt{3}+5\sqrt{2})} = \frac{2\times3+15\sqrt{2}}{4\times3-25\times2} = \frac{6+15\sqrt{2}}{12-50} = \frac{6+15\sqrt{2}}{-38}$

IV.4 Comparaison de réels comportant des radicaux :

Règle :

a et b étant des réels **positifs** on a :
- si $a < b$ alors $a^2 < b^2$.
- si $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

Exemple 1:

On a :
- $2 < 3$ donc $2^2 < 3^2$ alors $4 < 9$
- $9 < 16$ donc $\sqrt{9} < \sqrt{16}$ alors $3 < 4$.

Exemple 2 :

1. Compare les réels $m = 2\sqrt{5}$ et $n = 3\sqrt{2}$.
2. Déduis-en le signe du réel $w = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$.

Réponse :

1. Comparons les réels $m = 2\sqrt{5}$ et $n = 3\sqrt{2}$.

On a : $(2\sqrt{5})^2 = 4\times5 = 20$ et $(3\sqrt{2})^2 = 9\times2 = 18$

On sait que $20 > 18$ comme $2\sqrt{5}$ et $3\sqrt{2}$ sont positifs, alors $2\sqrt{5} > 3\sqrt{2}$.

2. On sait que $2\sqrt{5} > 3\sqrt{2}$ donc $2\sqrt{5} - 3\sqrt{2} > 0$. D'où le réel **w** est positif

Exemple 3 :

Donner le signe du réel $(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$

Réponse :

On a : $(\sqrt{3})^2 = 3$ et $(2\sqrt{2})^2 = 8$

On sait que $3 < 8$ donc $\sqrt{3} < \sqrt{8}$ alors $\sqrt{3} < 2\sqrt{2}$ d'où $\sqrt{3} - 2\sqrt{2} < 0$ **(ou encore $\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ est un réel négatif).**

IV.6 Racine carrée du carré d'un réel :

1. **Rappel :**

On appelle valeur absolue d'un réel **a** le réel positif ou nul noté **|a|, défini par :**

- $|a| = a$ **si** $a \geq 0$
- $|a| = -a$ **si** $a \leq 0$

Exemples :

$|21| = 21$; $|-5| = 5$; $|-\sqrt{7}| = \sqrt{7}$; $|0| = 0$

2. Propriétés :

La racine carrée du carré d'un nombre est égale à la valeur absolue de ce nombre.

Pour tout nombre réel a, $\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$

Exemple 1 :

Donne une écriture sans radical de chacun des nombres ci-dessous : $\sqrt{(-3\sqrt{5})^2}$; $\sqrt{(7{,}4)^2}$ et $\sqrt{(-\pi)^2}$

Corrigé :

$\sqrt{(-3\sqrt{5})^2} = |-3\sqrt{5}| = 3\sqrt{5}$ $\quad \sqrt{(7{,}4)^2} = |7{,}4| = 7{,}4$ $\quad \sqrt{(-\pi)^2} = |-\pi| = \pi$

Exemple 2 :

Ecrire plus simplement $\sqrt{(7-3\sqrt{5})^2}$ et $\sqrt{(5-6\sqrt{2})^2}$

Corrigé :

On a : $\sqrt{(7-3\sqrt{5})^2} = \|7-3\sqrt{5}\|$ Etude du signe de $7-3\sqrt{5}$ $7^2 = 49$ et $(3\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45$ donc $49 > 45 \Rightarrow \sqrt{49} > \sqrt{45}$ $\Rightarrow 7 > 3\sqrt{5} \Rightarrow 7-3\sqrt{5} > 0$ alors $7-3\sqrt{5}$ est positif. $\sqrt{(7-3\sqrt{5})^2} = \|7-3\sqrt{5}\| = 7-3\sqrt{5}$ Finalement : $\boxed{\sqrt{(7-3\sqrt{5})^2} = 7-3\sqrt{5}}$	On a : $\sqrt{(5-6\sqrt{2})^2} = \|5-6\sqrt{2}\|$ Etude du signe de $5-6\sqrt{2}$ $5^2 = 25$ et $(6\sqrt{2})^2 = 36 \times 2 = 72$ Donc $25 < 72 \Rightarrow \sqrt{25} > \sqrt{72}$ $\Rightarrow 5 < 6\sqrt{2} \Rightarrow 5-6\sqrt{2} < 0$ alors $5-6\sqrt{2}$ est négatif $\sqrt{(5-6\sqrt{2})^2} = \|5-6\sqrt{2}\| = -(5-6\sqrt{2})$ Finalement $\boxed{\sqrt{(5-6\sqrt{2})^2} = -5+6\sqrt{2}}$

Remarque :

$\boxed{\sqrt{a^2} \neq (\sqrt{a})^2 \text{, car } \sqrt{a^2} = |a| \text{ et } (\sqrt{a})^2 = a.}$

Exercice d'application 1 :

On donne $a = 2\sqrt{3} - 3$ et $b = \sqrt{21 - 12\sqrt{3}}$.

1. Calculer a^2 et b^2.
2. Etudier le signe de a.
3. En déduire une écriture de b comportant un seul radical.

Corrigé :

1. Calcule

   $a^2 = (2\sqrt{3}-3)^2 = (2\sqrt{3})^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 3 + (3)^2 = 12 - 12\sqrt{3} + 9 = 21 - 12\sqrt{3}$

   $b^2 = \left(\sqrt{21-12\sqrt{3}}\right)^2 = 21 - 12\sqrt{3}$

2. Etudie le signe de a.

   On a : $(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$ et $3^2 = 9$ donc $12 > 9 \Rightarrow 2\sqrt{3} > 3 \Rightarrow 2\sqrt{3} - 3 > 0$ **Donc a est positif.**

3. Une écriture de n comportant un seul radical

   $b = \sqrt{21-12\sqrt{3}} = \sqrt{(2\sqrt{3}-3)^2} = |2\sqrt{3}-3| = 2\sqrt{3} - 3.$ (**Car a est positif**) .

Exercice d'application 2 :

On donne $u = 2 - 3\sqrt{2}$

1. Calculer u^2.
2. Etudier le signe de u
3. Ecrire plus simplement $v = \sqrt{22 - 12\sqrt{2}}$.

Corrigé :

On donne $u = 2 - 3\sqrt{2}$

1. Calcule
   $u^2 = (2-3\sqrt{2})^2 = 2^2 - 2 \times 2 \times 3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2 = 4 - 12\sqrt{2} + 18 = 22 - 12\sqrt{2}$
2. Etudie le signe de u.
   On a : $2^2 = 4$ et $(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$ donc $4 > 18 \Rightarrow 2 < 3\sqrt{2} \Rightarrow 2 - 3\sqrt{2} < 0$ **Donc** $\boldsymbol{u}$ **est négatif.**
3. Ecris plus simplement $v = \sqrt{22 - 12\sqrt{2}}$.

$v = \sqrt{22-12\sqrt{2}} = \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2} = |2-3\sqrt{2}| = -(2-3\sqrt{2}) = -2+3\sqrt{2}$. **(car $\boldsymbol{u}$ est négatif)**

Exercice d'application 3 :

Soit les nombres réels suivants : $m = 7 + 4\sqrt{3}$ et $n = 7 - 4\sqrt{3}$

a) Montre que m est l'inverse de n.

b) Calcule m^2 et n^2.

c) Déduis de la question précédente que $\sqrt{97+56\sqrt{3}} - \sqrt{97-56\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$.

d) Vérifie que $u = \frac{m}{n} + \frac{n}{m}$ est un nombre entier naturel.

e) Justifier que $v = \frac{\sqrt{48}-7}{2\sqrt{97-56\sqrt{3}}}$ est un nombre rationnel.

Corrigé :

a) Montre que m est l'inverse de n.

$m \times n = (7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3}) = 7^2 - (4\sqrt{3})^2 = 49 - 48 = 1$ Donc m est l'inverse de n.

b) Calcule m^2 et n^2.

$m^2 = (7+4\sqrt{3})^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 2\sqrt{6} + (2\sqrt{6})^2 = 49 + 56\sqrt{3} + 48 = 97 + 56\sqrt{3}$

$n^2 = (7-4\sqrt{3})^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times 2\sqrt{6} + (2\sqrt{6})^2 = 49 - 56\sqrt{3} + 48 = 97 - 56\sqrt{3}$

c) Déduis de la question précédente que $\sqrt{97+56\sqrt{3}} - \sqrt{97-56\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$.

On sait que :

$$\sqrt{97+56\sqrt{3}} - \sqrt{97-56\sqrt{3}} = \sqrt{(7+4\sqrt{3})^2} - \sqrt{(7-4\sqrt{3})^2} = |7+4\sqrt{3}| - |7-4\sqrt{3}|$$

- Etude du signe de $7 - 4\sqrt{3}$

On a: $7^2 = 49$ et $(4\sqrt{3})^2 = 16 \times 3 = 48$ donc $49 > 48 \Rightarrow 7 > 4\sqrt{3} \Rightarrow 7 - 4\sqrt{3} > 0$

alors $7 - 4\sqrt{3}$est positif. $|7-4\sqrt{3}| = 7 - 4\sqrt{3}$

- $|7+4\sqrt{3}| = 7 + 4\sqrt{3}$ car la somme de deux nombre positifs est toujours positive.

Finalement : $\boldsymbol{\sqrt{97+56\sqrt{3}} - \sqrt{97-56\sqrt{3}} = 7 + 4\sqrt{3} - 7 - 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}}$

d) vérifie que $u = \frac{m}{n} + \frac{n}{m}$ est un nombre entier naturel.

On a : $u = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} = \frac{m^2+n^2}{m \times n} = \frac{497+56\sqrt{3}+97-56\sqrt{3}}{1} = 194$ **Donc $\boldsymbol{u = 194 \in \mathbb{N}}$**

e) Justifier que $v = \frac{\sqrt{48}-7}{2\sqrt{97-56\sqrt{3}}}$ est un nombre rationnel.

On a :$v = \frac{\sqrt{48}-7}{2\sqrt{97-56\sqrt{3}}} = \frac{4\sqrt{3}-7}{2\sqrt{(7-4\sqrt{3})^2}} = \frac{-(7-4\sqrt{3})}{2|7-4\sqrt{3}|} = \frac{-(7-4\sqrt{3})}{2(7-4\sqrt{3})} = -\frac{1}{2}$ Donc $V = -\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$

IV.7 Encadrement d'un réel comportant un radical :

Exemple :

Soient deux réels A et B tels que : $A = 4 - 2\sqrt{3}$ et $B = -7 + 3\sqrt{2}$.

Sachant que $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$ et $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$.

1) Donner un encadrement du réel A à 10^{-2}prés.
2) Donner un encadrement du réel B à 10^{-1} prés.

Réponse :

$A = 4 - 2\sqrt{3}$ On a: $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$ $-2 \times 1{,}732 > -2\sqrt{3} > -2 \times 1{,}733$ $-3{,}464 > -2\sqrt{3} > -3{,}466$ $4 - 3{,}464 > 4 - 2\sqrt{3} > 4 - 3{,}466$ $0{,}536 > 4 - 2\sqrt{3} > 0{,}534$ $0{,}534 < 4 - 2\sqrt{3} < 0{,}536$ D'ou : **$0{,}53 < A < 0{,}54$**	$B = -7 + 3\sqrt{2}$. On a : $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ $3 \times 1{,}414 < 3\sqrt{2} < 3 \times 1{,}415$ $4{,}242 < 3\sqrt{2} < 4{,}245$ $-7 + 4{,}242 < -7 + 3\sqrt{2} < -7 + 4{,}245$ $-2{,}758 < -7 + 3\sqrt{2} < -2{,}755$ $-2{,}758 < -7 + 3\sqrt{2} < -2{,}755$ **D'ou : $-2{,}8 < B < -2{,}7$**

- $0{,}53$ est appelé la valeur approchée par défaut à 10^{-2} prés de A.
- $0{,}54$ est appelé la valeur approchée par excès à 10^{-2} prés de A.
- $-2{,}8$ est la valeur approchée par défaut à 10^{-1} prés de B.
- $-2{,}7$ est la valeur approchée par excès à 10^{-1} prés de B.

V. Résolution de l'équation du type $x^2 = a$:

Propriétés :

✎ Si $a > 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$. Soit $S = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$

✎ Si $a = 0$, alors l'équation $x^2 = 0$ admet une unique solution $x = 0$. Soit $S = \{0\}$

✎ Si $a < 0$, alors l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution. $S = \emptyset$

Exemple :

Résoudre dans IR les équations suivantes :

$x^2 = 25$; $x^2 = 4$; $x^2 = 13$; $x^2 = 12$; $x^2 = -1$ et $x^2 = 0$

Réponse :

$x^2 = 25$	$x^2 = 4$	$x^2 = 13$	$x^2 = 12$	$x^2 = -1$	$x^2 = 0$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$ $\lvert x\rvert = 5$ $x = 5$ ou $x = -5$ $S = \{5; -5\}$	$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$ $\lvert x\rvert = 2$ $x = 2$ ou $x = -2$ $S = \{2; -2\}$	$\sqrt{x^2} = \sqrt{13}$ $\lvert x\rvert = \sqrt{13}$ $x = \sqrt{13}$ ou $x = -\sqrt{13}$ $S = \{\sqrt{13}; -\sqrt{13}\}$	$\sqrt{x^2} = \sqrt{12}$ $\lvert x\rvert = \sqrt{12}$ $x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$ $S = \{2\sqrt{3}; -2\sqrt{3}\}$	$x^2 = -1$ impossible Donc $S = \emptyset$	$x = 0$ $S = \{0\}$