IA DE KAFFRINE
IEF DE KOUNGHEUL
CEM MISSIRAH WADENE
Durée du Cours : 08HEURES

Année Scolaire : 2022-2023
Cellule : Mathématiques
Niveau : 3e
M.SOW Papa Alassane MSP

CHAPITRE III : EQUATIONS ET SYSTEMES D'EQUATION A DEUX INCONNUES

I. Equation du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

I.1 Définition :

On appelle équation du premier degré à deux inconnues, toute équation de la forme $\mathbf{ax + by + c = 0}$ où (x, y) sont des inconnues ; a, b et c étant des réels.

Exemples :

2x + 3y – 4 = 0 et 25x – 17 y + 21 = 0 sont des équations du 1e degré à deux inconnues.

I.2 Solution d'une équation dans $\mathbb{R}^2$:

- **Tout couple $(x_0 ; y_0)$ vérifiant l'égalité $ax + by + c = 0$ est solution de cette équation.**
- **Résoudre une équation du type $ax + by + c = 0$, c'est trouver tous les couples solutions de cette équation.**

Exemple :

Soit l'équation suivante : $2x + y - 4 = 0$.

Les couples de réels (1 ; 2), (7 ; 3), 5 ; −6) sont – ils solutions de cette équation ?

Réponse :

Cherchons si chacun des couples de réels vérifie l'équation $2x + y - 4 = 0$:

- Le couple (1 ; 2) on a : $2(1) + (2) - 4 = 0 \Rightarrow 2 + 2 - 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ (vraie)
  Le couple (1 ; 2) vérifie l'équation, donc **il est solution**
- Le couple (7 ; 3) on a : $2(7) + (3) - 4 = 0 \Rightarrow 14 + 3 - 4 = 0 \Rightarrow 13 = 0$ (fausse)
  Le couple (5 ; −6) ne vérifie pas l'équation, donc **il n'est pas solution**
- Le couple (5 ; −6) on a : $2(5) + (-6) - 4 = 0 \Rightarrow 10 - 6 - 4 = 0 \Rightarrow 10 - 10 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ (vraie)
  Le couple (5 ; −6) vérifie l'équation, donc **il est solution**

I.3 Recherche de solution d'une équation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

- **Pour trouver des couples de solution, on fixe une des inconnues pour chercher l'autre.**

Exemple :

Soit l'équation $3x + 2y - 6 = 0$

Trouver trois couples (x, y) de solution de cette équation.

Réponse :

- Si x = 1, on a : $3(1) + 2y - 6 = 0 \Rightarrow 2y - 3 = 0 \Rightarrow 2y = -3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$

Alors le couple $\mathbf{(1 ; -\frac{3}{2})}$ est solution de l'équation $3x + 2y - 6 = 0$.

- Si x = 0 , on a : $3(0) + 2y - 6 = 0 \Rightarrow 2y - 6 = 0 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow$ Donc $y = 3$

Alors le couple **(0 ; 3)** est solution de l'équation $3x + 2y - 6 = 0$.

- Si y = 0 on a : $3x + 2(0) - 6 = 0 \Rightarrow 3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6$ donc $x = 2$

Alors le couple **(2 ; 0)** est solution de l'équation $3x + 2y - 6 = 0$.

Remarque :

- **Une équation du premier degré à deux inconnues admet une infinité de solution.**
- **Pour trouver une solution d'une équation du premier degré à deux inconnues de la forme $ax + by + c = 0$, il suffit de donner à x une valeur et calculer la valeur de y correspondante (ou vice-versa).**

I.4 Exercice d'application :

A. Choisir la bonne réponse
   On considère l'équation $3x - 5y - 1 = 0$. Si $y = 1$, alors
   a) $x = 2$ $x = 3$ $x = -2$
   b) Dans ce cas le couple solution est :
      $(3; 1)$ $(1; 2)$ $(-2; 1)$
B. On considère l'équation suivante : $2x - 3y + 1 = 0$.

a) Les couples (0 ; 1) et (4 ; 3) sont-ils des solutions de cette équations ?
b) Donner trois couples de cette équation.

II. Système d'équation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

II.1 Définition :

On appelle système de deux équations à deux équations à deux inconnus tous systèmes de la forme :
$$\begin{cases} ax + by + c = 0 & (1) \\ a'x + b'y + c' = 0 & (2) \end{cases}$$

- **Un couple de réels (x_0 ; y_0) est solution de ce système si et seulement si ce couple est à la fois solution de l'équation (1) et (2).**

Exemple :
Identifie, parmi les systèmes suivants, ceux qui sont des systèmes de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$a)\begin{cases} 2x + y - 6z = 0 \\ x + y + 4 = 0 \end{cases}$ $b)\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -x + y = -3 \end{cases}$ $c)\begin{cases} 2x^2 + y = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$ $d)\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ -3y = 0 \end{cases}$

Corrigé
Les systèmes **b)** et **d)** sont des systèmes de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Exemple :
On considère le système suivant : $\begin{cases} x + 3y - 2 = 0 \ (1) \\ 2x - y = -3 \quad (2) \end{cases}$
Le couple $(-1 ; 1)$ est la solution de ce système car si on remplace x par -1 et y par 1, on obtient dans (1) :$(-1) + 3(1) - 2 = 0$ et dans (2) :$2(-1) - (1) = -3$
Donc les termes du couple vérifient les deux équations.

Exercice d'application :
On donne le système suivant : $\begin{cases} 2x - 5y + 3 = 0 \\ x - 3y + 3 = 0 \end{cases}$.
Parmi les couples de réels suivants :$(1 ; 1)$;$(-3 ; 0)$;$(6 ; 3)$;$(-2 ; 5)$ trouve ceux qui sont des solutions de ce système.

II.2 Méthode de résolution d'un système d'équation :

Il existe 4 méthodes de résolution pour un système d'équation à deux inconnues :
- Méthode de substitution ;
- Méthode de comparaison ;
- Méthode d'addition (combinaison) ;
- Méthode graphique.

1. Méthode de substitution :

La substitution consiste à exprimer une inconnue en fonction de l'autre dans une des équations, puis à la remplacer par sa valeur dans l'autre équation :

Exemple :
Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :
$$\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 & (1) \\ x + y + 4 = 0 & (2) \end{cases}$$
- On tire la valeur de y de l'équation (1) : $y = -2x + 6$
- On remplace y par sa valeur dans l'équation (2) : $x + (-2x + 6\ ) + 4 = 0$
- et trouver la valeur de x : $x - 2x + 6\ + 4 = 0 \Longrightarrow -x + 10 = 0$ Donc $\mathbf{x = 10}$
- On remplace x par sa valeur pour trouver la celle de y :
$$y = -2x + 6 \quad \Longrightarrow \quad y = -2(10) + 6 \quad \Longrightarrow \quad y = -20 + 6 \qquad \text{Donc } \mathbf{y = -14}$$
- On donne l'ensemble des solutions : $\mathbf{S = \{(10; -14)\}}$

2. Méthode de comparaison :

Elle consiste à exprimer la même inconnue en fonction de l'autre, ceci dans les deux équations, puis à faire l'égalité des deux expressions :

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 & (1) \\ 3x + 2y - 6 = 0 & (2) \end{cases}$

- On tire y de l'équation (1) : $2x + y - 2 = 0 \Longrightarrow y = -2x + 2$
- On tire y de l'équation (2) : $3x + 2y - 6 = 0 \Longrightarrow\ 2y = -3x + 6 \Longrightarrow y = \frac{-3x+6}{2}$
- On compare les deux y pour trouver la valeur de x : $-2x + 2 = \frac{-3x+6}{2}$

$$2(-2x + 2) = -3x + 6$$

Donc $\mathbf{x = -2}$

- On remplace la valeur de x dans (1) ou (2) pour trouver celle de y :

$y = -2x + 2 \ \Longrightarrow\ y = -2(-2) + 2$ Donc $\mathbf{y = 6}$

- On donne l'ensemble des solutions : $\mathbf{S} = \{(\mathbf{-2}; \mathbf{6})\}$

3. Méthode d'addition :

Elle consiste à donner des équations équivalentes à celles du système de façon qu'en faisant la somme, les termes contenant une des inconnues s'annulent :

Exemple 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 & (1) \\ x + 3y + 4 = 0 & (2) \end{cases}$

- On elimine x : $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ -2x - 6y - 8 = 0 \end{cases} \Longrightarrow\ y = -2$
- On elimine y : $\begin{cases} -6x - 3y + 6 = 0 \\ x + 3y + 4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow\ x = 2$
- On donne l'ensemble des solutions : $\mathbf{S} = \{(\mathbf{2}; \mathbf{-2})\}$

Exemple 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} -3x + 2y - 4 = 0 \\ 6x - 4y + 6 = 0 \end{cases}$

Réponse:

$(2)\times \begin{cases} -3x + 2y - 4 = 0 \\ 6x - 4y + 6 = 0 \end{cases}$	$-6x + 4y - 8 = 0$ $6x - 4y + 6 = 0$
$\boxed{S = \emptyset}$	$0 + 0 - 2 = 0$ (fausse)

Exemple 3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} 5x + 7y - 6 = 0 \\ 10x + 14y - 12 = 0 \end{cases}$

Réponse:

$(-2)\times \begin{cases} 5x + 7y - 6 = 0 \\ 10x + 14y - 12 = 0 \end{cases}$	$-10x - 14y - 12 = 0$ $10x + 14y - 12 = 0$ $0 = 0$ (vraie)
$\boxed{S = \mathbb{R}^2}$	

a) Méthode graphique :

Pour résoudre graphiquement un système de deux équations $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$,

On trace les deux droites (D) et (D') d'équations respectives : $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ dans un même repère.

Trois cas de figure se présentent :

- **Si les deux droites sont sécantes en un point, alors le couple de coordonnées de ce point est la solution du système.**
- **Si les deux droites sont parallèles disjointes, alors le système n'a pas de solution. ($S = \emptyset$.)**
- **Si les deux droites sont confondues, alors le système admet une infinité de solutions. ($S=\mathbb{R}^2$)**

Les solutions sont les couples de coordonnées de n'importe quel point de (D) ou (D').

Cas 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$

Réponse :

Pour résoudre graphiquement ce système il faut représenter dans un repère orthonormal les droites :

(D) : $\mathbf{x + 2y - 3 = 0}$

Si $x = 1$ alors $y = 1$

Si $x = 3$ alors $y = 0$

(D') : $\mathbf{2x - y - 1 = 0}$

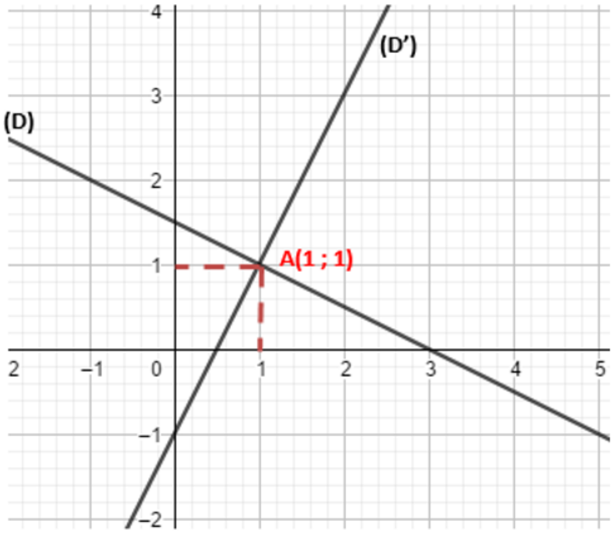
Si $x = 0$ alors $y = -1$

Si $x = 1$ alors $y = 1$

Ensuite on lit directement sur la figure la solution.

Les droite (D) et (D') se coupent au point A (1 ; 1)

Donc $\boxed{S = \{(1\,;1)\}}$



Cas 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

Réponse :

On trace les droites (D) et (D') d'équations respectives : $2x + y = 2$ et $2x + y = -1$

(D) : $\mathbf{2x + y = 2}$

Si $x = 0$ alors $y = 2$

Si $x = 1$ alors $y = 0$

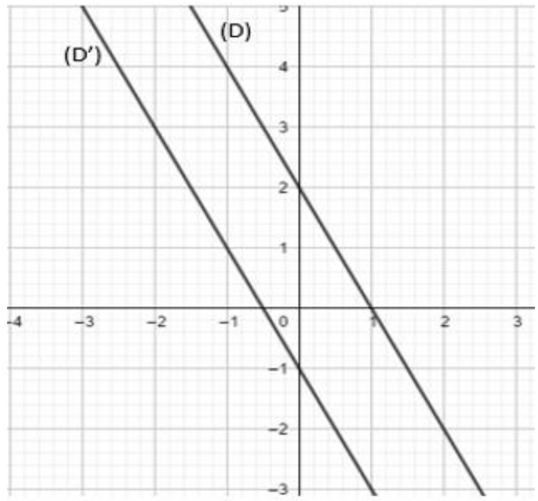
(D') : $\mathbf{2x + y = -1}$.

Si $x = 0$ alors $y = -1$

Si $x = -0{,}5$ alors $y = 0$

Les droites (D) et (D') sont parallèles (disjointes).

Donc le système n'a pas de solution.



Cas 3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$

Réponse :

On trace les droites (D) et (D') d'équations respectives :

(D) : $2x - y = 2$ — (D') : $4x - 2y = 4$.

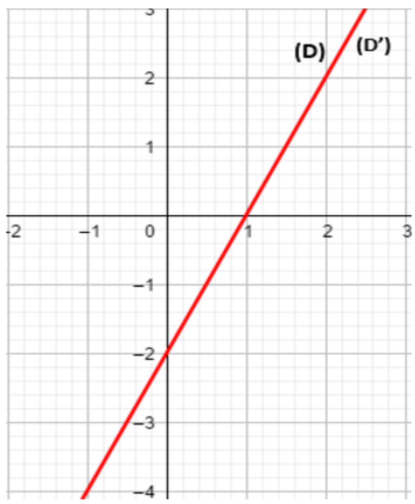
Si $x = 0$ alors $y = -2$ — Si $x = 0$ alors $y = -2$

Si $x = 1$ alors $y = 0$ — Si $x = 1$ alors $y = 0$

(D) et (D') sont confondues.

Donc le système admet une infinité de solutions.

Les solutions sont les couples de coordonnées de n'importe quel point de (D) ou (D').



Exercice d'application :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$(S_1)\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$ $(S_2)\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 4x + 7y = 1 \end{cases}$ $(S_3)\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ 3x - 2y = -7 \end{cases}$

Réponse :

$\mathbf{S_1 = (1; 2)}$ $\mathbf{S_2 = (2; -1)}$ $\mathbf{S_3 = (-1; 2)}$

III. Résolution d'un problème :

Méthode :

Quatre étapes importantes sont à retenir pour organiser la résolution algébrique d'un problème :
1) le choix des inconnues ;
2) la mise en système d'équation ;
3) la résolution du système d'équation ;
4) interprétation du résultat pour donner la solution du problème.

Exemple 1 :
Un organisateur propose les tarifs suivants à un spectacle :
- 1 000 f pour les adultes
- 500 f pour les enfants.

A la fin du spectacle il fait une recette totale de 120 000 f pour 205 tickets vendus. Déterminons le nombre d'adultes et celui d'enfants ayant assisté au spectacle.

Réponse :
1) On désigne par x le nombre d'adultes et par y celui d'enfants ayant assisté au spectacle.
2) On traduit les expressions suivantes en mathématiques :
a) Le nombre total de tickets vendus est 205. On trouve : $+ y = 205$.
b) La recette totale est égale à 120 000 f. On trouve : $500x + 1\,000y = 120\,000$.
On obtient le système d'équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suivant :

$$\begin{cases} x + y = 205 \\ 500x + 1\,0000y = 120\,000 \end{cases}$$

3) On résout le système d'équations (par combinaison).
On obtient : $x = 170$ et $y = 35$. La solution du système est le couple (170 ; 35).
4) Conclusion :
Il y a 170 enfants et 35 adultes qui ont assisté au spectacle.

Exemple 2 :
Un camion transporte 20 caisses de masses différentes : les unes pèsent 28 kg, les autres 16 kg.
Sachant que la masse totale de ces caisses est 416 kg, combien y a-t-il de caisses de chaque catégorie ?
Solution :
Soit x le nombre de caisses de 28 kg.
Soit y le nombre de caisses de 16 kg.
La traduction de la phrase : ≪ Un camion transporte 20 caisses de masses différentes ≫est :$\boldsymbol{x + y = 20}$
La traduction de la phrase : ≪ Sachant que la masse totale de ces caisses est 416 kgest :

$$\boldsymbol{28x + 16y = 416.}$$

Nous avons donc le système : $\begin{cases} x + y = 20 \\ 28x + 16y = 416 \end{cases}$

Il y a 8 caisses de 28kg et 12 caisses de 16kg.

Exercice d'application :
Si on diminue la largeur d'un rectangle de 5 cm, et si l'on augmente sa longueur de 7 cm, l'aire de ce rectangle reste inchangée. Si l'on augmente sa longueur de 20 cm et si l'on diminue sa largeur de 13 cm, l'aire augmente de 20 cm^2.
Déterminer les dimensions de ce rectangle.

Réponse :
Choix des inconnues :
Soit x la largeur et y la longueur de ce rectangle.
Mises en équations
- **1^{ere} phrase :**

$(x – 5)\ (y + 7) = xy$, alors : $xy + 7x - 5y - 35 = xy \ \Rightarrow xy + 7x - 5y - 35 - xy = 0$
$\Rightarrow \boldsymbol{7x - 5y - 35 = 0}$
- **2eme phrase :**

$(x – 13)(y + 20) = xy + 20 \Rightarrow xy + 20x - 13y - 260 = xy + 20 \Rightarrow xy + 20x - 13y - 260$
$\Rightarrow - xy - 20 = 0 \qquad \Rightarrow \boldsymbol{20x - 13y - 280 = 0}$

Donc, le problème se ramène au système d'équations suivant : $\begin{cases} 7x - 5y - 35 = 0 \\ 20x - 13y - 280 = 0 \end{cases}$

Résolution du système d'équations

$$\begin{cases} 7x - 5y - 35 = 0 \\ 20x - 13y - 280 = 0 \end{cases}$$

La largeur de ce rectangle est égale à 105 cm et la longueur de 140 cm.