Bassirou Mboup
Etudiant en Mathématiques Appliquées et Informatique
Unité de Formation et de Recherche
des Sciences Appliquées et de Technologie
de l'Université Gaston Berger de Saint-louis du Sénégal
E-mail :roubassy@yahoo.fr
☎ :774243352

DEDICACES

A mon père et ma mère pour tout l'effort fourni pour ma réussite.
Je vous témoigne toute ma reconnaissance.

Ce fascicule qui s'appelle **VAINCRE LES MATHS AU B.F.E.M** est dédié aux élèves de troisieme.

Il contient tous les cours de Mathématiques en classe de troisième bien détaillés et des exercices d'application corrigés.

Les cours sont présentés sous forme de chapitre et à la fin de chaque chapitre des exercices d'applications qui permettront à l'élève d'assimiler son cour.

Remerciement

Mes remerciements iront à toute personne désireuse de formuler des remarques ou des corrections.Ces remarques et corrections seront les biens venues.Veuillez les adresser à l'adresse suivante :roubassy@yahoo.fr

Table des matières

ACTIVITES NUMERIQUES

Chapitre 1

RACINE CARREE

1.1 Définitions et Notations

On appelle racine carrée d'un nombre positif a noté $\sqrt{a}$,le nombre positif dont le carré est égal á a.
Dans $\sqrt{a}$,$\sqrt{()}$ est le radical et a le radicande
On a $x^2 = a$ en posant $x = \sqrt{a}$ on obtient $(\sqrt{a})^2 = a$
Exemple
$7^2 = 49$ alors $\sqrt{49} = 7$
$9^2 = 81$ alors $\sqrt{81} = 9$
Remarque
$\sqrt{a}$ n'a de sens que si $a \geq 0$ (a positif)
$\sqrt{a}$ est toujours un nombre positif ($\sqrt{a} \geq 0$)

1.2 Nombre irrationnel :Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

$\sqrt{3} = 1,7320508\ldots$
$\sqrt{19} = 4,3588989\ldots$
La partie décimale de $\sqrt{3}$ et $\sqrt{19}$ est illimitée mais non periodique.
Donc $\sqrt{3}$ et $\sqrt{19}$ ne sont pas des nombres rationnels.Ce sont des nombres irrationnels.
$\Pi = 3,1415922654\ldots$ est aussi un nombre irrationnel.

Les nombres irrationnels viennent completer les nombres rationnels pour donner (former) l'ensembles des nombres réels noté $\mathbb{R}$
$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$

1.3 Proprietés

1.3.1 Racine carrée d'un produit

soient a et $b \in \mathbb{R}+$

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

En effet on a $(\sqrt{a})^2 = a$ et $(\sqrt{b})^2 = b$
donc $(\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b$
de plus $(\sqrt{a \times b})^2 = a \times b$
donc $(\sqrt{a \times b})^2 = (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2$
d'ou $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
Conséquences : Soient a,b,c trois réels positifs
$\sqrt{a \times b \times c} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c}$
Soit $a \in \mathbb{R}+$ et $n \in \mathbb{N}$
On a $\sqrt{a^{2n}} = \sqrt{a^{n+n}} = \sqrt{a^n \times a^n}$
$\sqrt{a^{2n}} = \sqrt{a^n} \times \sqrt{a^n} = (\sqrt{a^n})^2$
d'ou $\sqrt{a^{2n}} = a^n$

1.3.2 Racine carrée d'un quotient

Soit a et $b \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

En effet on a $(\sqrt{a})^2 = a$ et $(\sqrt{b})^2 = b$ alors $\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$ or $\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = (\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})^2 = \frac{a}{b}$
de plus $(\sqrt{\frac{a}{b}})^2 = \frac{a}{b}$
donc $(\sqrt{\frac{a}{b}})^2 = (\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})^2$
d'ou $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
Conséquences
Soit $a \in \mathbb{R}^*+$

On a $\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{a}}$ d'ou $\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

1.4 Calcul sur les radicaux

1.4.1 Somme algébrique

Exemple 1 :ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $b \succ 0$ les expressions suivantes.
$A = 6\sqrt{54} + 7\sqrt{24} - 6\sqrt{6} + 2\sqrt{150}$
$A = 6\sqrt{9 \times 6} + 7\sqrt{4 \times 6} - 6\sqrt{6} + 2\sqrt{25 \times 6}$
$A = 6\sqrt{9} \times \sqrt{6} + 7\sqrt{4} \times \sqrt{6} - 6\sqrt{6} + 2\sqrt{25} \times \sqrt{6}$
$A = 6 \times 3\sqrt{6} + 7 \times 2\sqrt{6} - 6\sqrt{6} + 2 \times 5\sqrt{6}$
$A = 18\sqrt{6} + 14\sqrt{6} - 6\sqrt{6} + 10\sqrt{6}$
$A = (18 + 14 - 6 + 10)\sqrt{6}$

$$A = 36\sqrt{6}$$

$B = 2\sqrt{128} + 4\sqrt{32} - 7\sqrt{8} - 8\sqrt{72}$
$B = 2\sqrt{64 \times 2} + 4\sqrt{16 \times 2} - 7\sqrt{4 \times 2} - 8\sqrt{36 \times 2}$
$B = 2 \times 8\sqrt{2} + 4 \times 4\sqrt{2} - 7 \times 2\sqrt{2} - 8 \times 6\sqrt{2}$
$B = 16\sqrt{2} + 16\sqrt{2} - 14\sqrt{2} - 48\sqrt{2}$
$B = (16 + 16 - 14 - 48)\sqrt{2}$

$$B = -30\sqrt{2}$$

Exemple 2 :Calculer
$A = (2\sqrt{3} - 5)^2$ et $B = (7 + 3\sqrt{2})^2$

1.4.2 Expression conjuguée :rendre rationnel le dénominateur d'un quotient

Expression de la forme $\frac{a}{b\sqrt{c}}$ avec $c \succ 0$

Si l'expression se présente sous la forme $\frac{a}{b\sqrt{c}}$ on multiplie le numérateur et le dénominateur de ce quotient par racine carré de c ($\sqrt{c}$) pour rendre

rationnel le dénominateur du quotint.
Exemple
$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a\times\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\times\sqrt{c}} = \frac{a\times\sqrt{c}}{b(\sqrt{c})^2} = \frac{a\sqrt{c}}{b\times c}$
Exemple :Rendre rationnel le dénominateur des radicaux
$A = \frac{5}{3\sqrt{7}} = \frac{5\times\sqrt{7}}{3\sqrt{7}\times\sqrt{7}}$
$A = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{3\times 7}} = \frac{5\sqrt{7}}{21}$

Expression de la forme $\frac{a}{b+c\sqrt{d}}$

Pour rendre rationnel une expréssion de la forme $\frac{a}{b+c\sqrt{d}}$,on multiplie le numérateur et le dénominateur de cette expréssion par l'expréssion conjuguée du dénominateur.
Expression conjuguée
On a $(b+c\sqrt{d})(b-c\sqrt{b}) = b^2-(c\sqrt{d})^2 = b^2-c^2(\sqrt{d})^2 = b^2-c^2d$
On remarque que le radical a disparu,ainsi l'expression qui permet de faire disparaitre le radical de $b+c\sqrt{d}$ n'est rien d'autre que $b-c\sqrt{d}$.
Cette expression $b-c\sqrt{d}$ est appelée **expression conjuguée** de $b+c\sqrt{d}$
Exemple
$A = 5-2\sqrt{3},\ E.C(A) = 5+2\sqrt{3}$
$B = \sqrt{7}+1\ E.C(B) = \sqrt{7}-1$
$C = \sqrt{3}-4\sqrt{7}\ E.C(C) = \sqrt{\sqrt{3}}+4\sqrt{7}$
☞Rendons rationnel l'expression suivante
$A = \frac{2}{5-2\sqrt{3}} = \frac{2}{5-2\sqrt{3}} \times \frac{5+2\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}} = \frac{2(5+2\sqrt{3})}{(5-2\sqrt{3})(5+2\sqrt{3})} = \frac{10+4\sqrt{3}}{25-12} = \frac{10+14\sqrt{3}}{13}$

1.4.3 Comparaison des réels comportants des radicaux

réels du type $a\sqrt{b}$ avec $b \succ 0$

1 cas :cas ou les réels sont positifs

Pour comparer deux réels positifs comportant des radicaux,on les éleve au carré et celui qui a le plus grand carré correspond au réel le plus grand.
exemple :comparons $4\sqrt{5}$ et $3\sqrt{7}$
Ona $(4\sqrt{5})^2 = 80$ et $(3\sqrt{7})^2 = 63$ donc $(4\sqrt{5})^2 \succ (3\sqrt{7})^2$ d'ou $4\sqrt{5} \succ 3\sqrt{7}$

2 cas : cas ou les réels sont négatifs

Pour comparer deux réels négatifs comportant des radicaux,on les élèleve au carré et celui qui est le plus grand correspond au réel le plus petit.
Exemple :Comparons $-3\sqrt{5}$ et $-4\sqrt{3}$
On a $(-3\sqrt{5})^2 = 45$ et $(-4\sqrt{3})^2 = 48$ donc $(-3\sqrt{5})^2 \prec (-4\sqrt{3})^2$ d'ou $-3\sqrt{5} \succ -4\sqrt{3}$

1.5 Valeur absolue -Racine carrée du carré d'un réel

1.5.1 Valeur absolue

Définition

On appelle valeur absolue d'un réel a noté $|a|$ le réel positif definit de la maniere suivante :
$|a| = a$ si a est positif
$|a| = -a$ si a est negatif
Exemple
$A = \left|2 - 3\sqrt{2}\right| = -(2 - 3\sqrt{2}) = -2 + 3\sqrt{2}$
proprieté :Soit x et $y \in \mathbb{R}+$
$|x + y| \leq |x| + |y|$
$|xy| = xy$ si x et y sont meme signe
$|xy| = -xy$ si x et y sont de signe contraire
$|x| = |y|$ si et seulement si $x = y$ ou $x = -y$
$|x| = y$ (avec $y \in \mathbb{R}+$) si et seulement si $x = y$ ou $x = -y$
$|x| \prec y$ (avec $y \in \mathbb{R}+$) si et seulement si $x \prec y$ ou $x \succ -y$
$|x| \succ y$ (avec $y \in \mathbb{R}+$) si et seulement si $x \succ y$ ou $x \prec -y$

1.5.2 Valeur absolue d'un réel et racine du carré de ce réel

Soit $x \in \mathbb{R}$
On a $\sqrt{x^2} = x$ si x est positif

$\sqrt{x^2} = -x$ si x est négatif
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ ona $\sqrt{x^2} = |x|$
Exemple :Calculons
$A = \sqrt{(2-3\sqrt{5})^2} = \left|2-3\sqrt{5}\right|$ or $2-3\sqrt{5}$ est négatif
donc $A = -(2-3\sqrt{5}) = -2+3\sqrt{5}$

1.6 Encadrement d'une expression comportant des radicaux

Exemple :Sachant que $3,6 \leq \sqrt{13} \leq 3,7$ donner un encadrement á 10^{-1} prés de $5-2\sqrt{13}$
on a $3,6 \leq \sqrt{13} \leq 3,7$
$-2\times 3,6 \geq -2\times\sqrt{13} \geq -2\times 3,7$
$-7,2 \geq -2\times\sqrt{13} \geq -7,4$
$-7,4 \leq -2\sqrt{13} \leq -7,2$
$5-7,4 \leq 5-2\sqrt{13} \leq 5-7,2$
$-2,4 \leq 5-2\sqrt{13} \leq -2,2$

1.7 Exercices d'Application

Exercice 1 :B.F.E.M 1997
1) calculer l'expression

$$X = \sqrt{500} + 3\sqrt{5} - 3\sqrt{45}$$

Donner le résultat sous forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers .
2) On donne les deux réels A et B tels que $A = 2+\sqrt{6}$ et $B = 1-\sqrt{6}$
Calculer A^2 et B^2 puis $A\times B$.
Donner chaque expression sous la forme $p+q\sqrt{6}$ où p et q sont des entiers relatifs.
Exercice 2 :B.F.E.M 1999
1/ On pose : $a = 1+\sqrt{5}$; $b = 1-\sqrt{3}$ Calculer a^2 et b^2 .
2/ Simplifier $c = \frac{1+\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}$, puis rendre rationnel son dénominateur.
Effectuer le produit $a\times c$. Que représente a pour c ?
3/ Montrer que $d = \frac{2-\sqrt{12}}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$ est un entier relatif que l'on déterminera

Exercice 3 :B.F.E.M 2001
On donne les expressions :

$$p = [(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - 1][(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 1] \ et \ q = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

1/Calculer p puis rends rationnel le dénominateur de q.
2/Montre que $\frac{p+q^2}{p-2q} \in \mathbb{D}$
3/ Résous l'équation $px^2 + q^2 - 3 = 0$

Chapitre 2

CALCUL ALGEBRIQUE

2.1 Calcul littéral

2.1.1 Egalités Usuelles(Identité Remarquable)

Soient a et b deux nombres réels
$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + a \times b + a \times b + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - a \times b - a \times b + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - a \times b + a \times b - b^2 = a^2 - b^2$
Quelque soient a et $b \in \Re$

$$\boxed{\begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \end{array}}$$

Application
$(x+3)^2 = x^2 + 2 \times 3x + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
$(2x-5)^2 = (2x)^2 - 2 \times 5 \times 2x + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$
$(x+1)(x-1) = x^2 - 1$

2.1.2 Développement et Réduction d'expréssion

Développer une expréssion c'est mettre ses termes sous forme de produit de somme ou de différence ou les deux á la fois.

Ainsi nous appliquons la loi de la distributivité ou la loi de la double distibutivité ou le développement des identités remarquables ou combiner les trois á la fois
soit a , b, c et $d \in \mathbb{R}$
$a(b+c) = ab + ac$:c'est la loi de la distributivité
$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$:c'est la loi de la double distributivité
Exemple :développer les expressions suivantes
$A(x) = (2x+3)[(x-8) + 3(1-2x)] + (x+3)^2$
$A(x) = (2x+3)(x-8+3-6x) + (x^2+6x+9)$
$A(x) = (2x+3)(-5-5x) + (x^2+6x+9)$
$A(x) = (-10x - 10x^2 - 15 - 15x) + (x^2+6x+9)$
$A(x) = (-10x^2 - 25x - 15 + x^2 + 6x + 9)$
$A(x) = -9x^2 - 19x - 6$

2.2 Factorisation

Factoriser une expression c'est de le mettre sous forme de produit de deux ou de plusieurs facteurs.Il n'existe pas de méthode générale pour faire une factorisation,on aura soit á mettre en évidence le facteur commun,soit utiliser les égalités usuelles soit enfin á combiner les deux á la fois

2.2.1 Mise en évidence d'un facteur commun

2.2.2 Cas où le facteur commun est apparent

Exemple :Factoriser l'expression suivante
$A(x) = (3x-7)(x-2) + (x-2)(4x-1) + 2(x-2)$
$A(x) = (x-2)[(3x-7) + (4x-1) + 2]$
$A(x) = (x-2)(3x-7+4x-1+2)$
$A(x) = (x-2)(7x-6)$

2.2.3 Cas où le facteur commun est caché

Exemple :Factoriser l'expression suivante
$A(x) = (x-3)^2 + (6x-18)(2x+1) - x + 3$
$A(x) = (x-3)(x-3) + 6(x-3)(2x+1) - (x-3)$
$A(x) = (x-3)[(x-3) + 6(2x+1) - 1]$
$A(x) = (x-3)(x-3+12x+6-1)$
$A(x) = (x-3)(13x+2)$

2.2.4 L'utilisation des égalités usuelles :reconnaitre le développement d'une identité remarquable

Exemple :Factoriser l'expression suivante.
$B(x) = (3x-1)^2 - 4$
$B(x) = (3x-1)^2 - 2^2$
$B(x) = (3x-1-2)(3x-1+2)$
$B(x) = (3x-3)(3x+1)$
$B(x) = 3(x-1)(3x+1)$

2.3 Simplification d'un quotient de deux expressions littérales

2.3.1 Condition d'existence d'un quotient

Un quotient est composé de numerateur et de dénominateur ;pour que ce quotient existe il faut que son dénominateur soit différent de zero.
donc $\frac{A}{B}$ existe si et seulement si $B \neq 0$
Exemple
$A(x) = \frac{2x+3}{x}$ existe ssi $x \neq 0$
$B(x) = \frac{2x-3}{2x+3}$ existe ssi $2x+3 \neq 0$ ie $x \neq \frac{-3}{2}$

2.3.2 Simplification d'un quotient

Pour simplifier un quotient de deux expressions littérales,on doit veiller d'abord á la condition d'existence de ce quotient et ensuite simplifier par le

facteur commun á la fois du numérateur et au dénominateur.
Exemple :Simplifier l'expression suivante
$C(x) = \frac{(3x+2)(8x+17)}{(6x+19)(8x+17)}$
$C(x)$ existe ssi $(6x + 19)(8x + 17) \neq 0$
ssi $(6x + 19) \neq 0$ ou $(8x + 17) \neq 0$
d'ou $x \neq \frac{-19}{6}$ **ou** $x \neq \frac{-17}{8}$
pour tout $x \neq \frac{-19}{6}$ **et** $x \neq \frac{-17}{8}$ alors $C(x) = \frac{3x+2}{6x+19}$

2.4 Exercices d'Applications

EXERCICES 1 :B.F.E.M 2005
On donne les expressions suivantes :
$f(x) = (3x - 5)^2 - (2x - 1)^2$ et $g(x) = x^2 + (2x + 1)(5 - x) - 25$
1) Développer, réduire et ordonner $f(x)$ et $g(x)$
2) Factoriser $f(x)$ et $g(x)$.
3) Soit $h(x) = \frac{(x-4)(5x-6)}{(5-x)(x-4)}$
a) Donner la condition d'existence de $h(x)$ puis simplifier $h(x)$.
b) Résoudre dans $\Re$:$|h(x)| = 2$
EXERCICES 2 :B.F.E.M 1998
1) On donne l'expression $A = \sqrt{121} - 2\sqrt{112} + \sqrt{63} - \sqrt{81}$
Ecrire A sous la forme $a + b\sqrt{c}$ avec $(a,b,c \in$ z).
2) Soit l'expression $B(x) = x - 1 + (x + 7)(2x - 2)$
a) Factoriser $B(x)$
b) Développer, réduire, ordonner $B(x)$
3) Soit l'expression $q(x) = \frac{B(x)}{(x-1)(x+7)}$.
a) Etablir, la condition d'existence de $q(x)$ et la simplifier.
b) Calculer $q(x)$ pour $x = 1$ et pour $x = \sqrt{2}$ (sans radical au dénominateur).

Chapitre 3

EQUATION ET INEQUATION

3.1 Equation et inéquation á une seule inconnue

3.1.1 Equation produit :$(ax+b)(cx+d)=0$ avec a et c $\neq 0$

La résolution de ce type d'équation s'appuie sur la proprieté suivante :
Un produit de deux facteurs est nul si l'un au moins de ces facteurs est nul.
ie $X.Y=0$ ssi $X=0$ ou $Y=0$
Exemple :résoudre l'équation $(2x+5)(3x+7)=0$
$(2x+5)(3x+7)=0$ ssi $2x+5=0$ ou $3x+7=0$
ssi $2x=-5$ ou $3x=-7$
ssi $x=\frac{-5}{2}$ ou $x=\frac{-7}{3}$
$S=\left\{\frac{-7}{3};\frac{-5}{2}\right\}$

3.1.2 Equation du type :$|ax+b|=|cx+d|$ avec a et $c\neq 0$

La résolution de cette équation s'appuie sur la proprieté suivante :
$|A|=|B|$ ssi $A=B$ ou $A=-B$
Exemple 1 :résoudre l'équation $|2x-1|=|-3x+2|$
$|2x-1|=|-3x+2|$ ssi $2x-1=-3x+2$ ou $2x-1=-(-3x+2)$
ssi $2x+3x=2+1$ ou $2x-1=3x-2$
ssi $5x=3$ ou $2x-3x=-2+1$

ssi $x = \frac{3}{5}$ ou $-x = -1$ donc $x = 1$
$S = \left\{\frac{3}{5}; 1\right\}$
Exemple 2 :Ramener certains équation sous formes $|ax + b| = |cx + d|$
Résoudre l'équation $(2x - 1)^2 = (-x + 3)^2$ dans $\Re$
$(2x - 1)^2 = (-x + 3)^2$ ssi $\sqrt{(2x-1)^2} = \sqrt{(-x+3)^2}$ ssi$|2x - 1| = |-x + 3|$
ssi $2x - 1 = -x + 3$ ou $2x - 1 = -(-x + 3)$
ssi $2x + x = 3 + 1$ ou $2x - 1 = x - 3$
ssi $3x = 4$ ou $2x - x = -3 + 1$
ssi $x = \frac{4}{3}$ ou $x = -2$
$S = \left\{-2; \frac{4}{3}\right\}$

3.1.3 Equation du type :$ax^2 + b = 0$ avec $a \neq 0$

Exemple 1 :résoudre l'équation $4x^2 + 9 = 0$
$4x^2 + 9 = 0$ ssi $4x^2 = -9$ donc $x^2 = \frac{-9}{4}$ imposible car un carré n'est jamais négatif dans $\mathbb{R}$
d'ou l'équation $4x^2 + 9 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$
Exemple 2 :résoudre l'équation $4x^2 - 9 = 0$
il y'a deux méthodes de résolution pour cette équation.
1er methode :
$4x^2 - 9 = 0$
ssi $4x^2 = 9$
ssi $x^2 = \frac{9}{4}$
ssi $\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{9}{4}}$ ssi $|x| = \frac{3}{2}$ ssi $x = \frac{3}{2}$ ou $x = \frac{-3}{2}$
$S = \left\{\frac{-3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$
2eme méthode exercice pour le lecteur

3.1.4 Equation faissant intervenir des quotients

Exemple 1 :résoudre l'équation suivante $\frac{2x+1}{3x+7} = 0$
La résolution de ce type d'équation s'appuie sur la proprieté suivante :
un quotient est nul si son numérateur est nul
En effet $\frac{2x+1}{3x+7} = 0$ ssi $2x + 1 = 0$ ssi $x = \frac{-1}{2}$
Exemple 2 :résoudre l'équation suivante $\frac{2x-3}{3x-2} = 1$
$\frac{2x-3}{3x-2} = 1$ existe ssi $3x - 2 \neq 0$ ie $x = \frac{2}{3}$

Pour $x \neq \frac{2}{3}$ l'équation $\frac{2x-3}{3x-2} = 1$ peut s'écrire sous la forme :

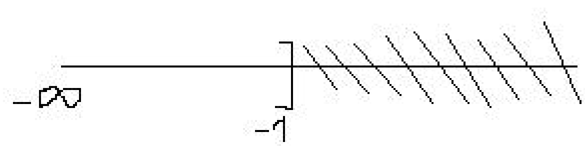
$$2x - 3 = 1(3x - 2)$$
$$2x - 3 = 3x - 2$$

$2x - 3x = -2 + 3$ ssi $-x = 1$ ssi $x = 1$
On a $1 \neq \frac{2}{3}$ donc $S = \{1\}$

3.2 Inéquation

3.2.1 Inéquation de la forme $ax + b \geq cx + d$

Resoudre l'inéquation $2x - 5 \geq 5x - 2$ dans $\mathbb{R}$
On aura $2x - 5x \geq -2 + 5$
ssi $-3x \geq 3$
ssi $x \leq \frac{3}{-3}$
ssi $x \leq -1$



La partie non hachurée de la droite graduée est la solution graphique de l'inéquation $2x - 5 \geq 5x - 2$

3.2.2 Inéquation produit $(ax + b)(cx + d) \geq 0$ ou ≤ 0

On étudie d'abord de manière séparée le signe de chaque facteur puis on combine les deux dans un tableau appelé tableau de signe afin de déterminer le signe du produit
Résolvons l'inéquation $(2x - 6)(-x + 4) \geq 0$
Posons $2x - 6 = 0 \quad -x + 4 = 0$
$2x = 6 \quad -x = -4$

$x = 3 \quad x = 4$
$2x - 6 \succ 0 \quad -x + 4 \succ 0$
$2x \succ 6 \quad -x \succ -4$
$x \succ 3 \quad x \prec 4$

x	$-\infty$	3		4	$+\infty$
2x-6	$-$	0	$+$		$+$
-x+4	$+$		$+$	0	$-$
(2x-6)(-x+4)			$+$		

S= [3 ; 4]

3.2.3 Inéquation faisant intervenir des quotients

Exemple :résolution de l'inéquation $\frac{x+3}{x+1} \leq \frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$
l'inéquation existe ssi $x + 1 \neq 0$ ie $x \neq -1$
Pour $x \neq -1$ l'inéquation $\frac{x+3}{x+1} \leq \frac{1}{2}$ s'écrit comme suit :
$\frac{x+3}{x+1} - \frac{1}{2} \leq 0$
ssi $\frac{2\times(x+3)}{2\times(x+1)} - \frac{1\times(x+1)}{2\times(x+1)} \leq 0$
ssi $\frac{2x+6}{2\times(x+1)} - \frac{x+1}{2\times(x+1)} \leq 0$
ssi $\frac{2x+6-x-1}{2(x+1)} \leq 0$
ssi $\frac{x+5}{2(x+1)} \leq 0$
Ainsi étudions de manière séparé les facteurs
$x + 5 = 0$ ssi $x = -5$ ensuite $x + 5 \succ 0$ ssi $x \succ -5$
$2(x + 1) = 0$ ssi $x + 1 = 0$ ssi $x = -1$ ensuite $2(x + 1) \succ 0$ ssi $x + 1 \succ 0$ ssi $x \succ -1$
Attention :N'oublier pas que si $x = -1$ l'inéquation n'a pas de sens.

Donnons le tableau

x	$-\infty$		-5		-1		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$2(x+1)$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+5}{2(x+1)}$		$+$		$-$	$\|\|$	$+$	

$S = [-5 ; -1[$

remarque :L'intervalle de la solution est ouverte en -1 ceci s'explique par le fait que x doit être different de -1 car si $x = -1$ l'inéquation n'a pas de sens.

3.3 Exercices d'Applications

EXERCICES 1 :B.F.E.M 2010
On donne l'expression $A(x) = (2x+1)(5x+1) - (4x+2)(x-2)$.
1. Développe et réduis $A(x)$.
2. Factorise $A(x)$.
3. Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(2x+1)(3x+5) \leq 0$.

EXERCICES 2 :B.F.E.M 2009
On donne les réels a=$2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$ et b=$\frac{1}{3\sqrt{2}+4}$.
1. Montre que les nombres a et b sont opposés.
2. Soit $A = \sqrt{(1-2\sqrt{2})^2} + (\sqrt{2}-2)^2 - \sqrt{18}$
Montre que $A = 5 - 5\sqrt{2}$ puis encadre-le à 10^{-2} prés sachant que $1,414 \prec \sqrt{2} \prec 1,415$
3. On donne $f(x) = 5x^2 - 20 + (-3x+6)(4x+3)$
. a. Montre que $f(x) = (x-2)(1-7x)$.

b. Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x) \leq 0$.

EXERCICES 3 :B.F.E.M 2002

1) Développer et réduire l'expression $M = 4(x-1)^2 - (x-5)^2$.

2) Factoriser l'expression $N = x^2 + 9 - 6x - (3-x)(2x+1)$.

3) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles on a $M \leq N$ puis représenter graphiquement l'ensemble de ces valeurs de x.

Chapitre 4

SYSTEME D'EQUATION ET D'INEQUATION

4.1 Systeme d'équation du 1er degré á deux inconnues

Il s'agit d'une combinaison de deux équations du 1er degré á deux inconues

Exemple : $\left\{\begin{array}{l} x-3y-4=0 \;\; (1) \\ 2x+y+3=0 \;\; (2) \end{array}\right.$

4.1.1 Méthode de résolution

Résoudre de telles systemes d'équation, c'est trouvé l'ensemble des couples (x, y) solutions en même temps des équations (1) et (2).

4.1.2 Méthode par substitution

Cette méthode consiste à exprimer l'une des inconnues en fontion de l'autre dans une des deux équations et de la remplacer dans l'autre équation de sorte à obtenir une équation du 1er degré á une seule inconnue

on a $\left\{\begin{array}{l} x-3y-4=0 \\ 2x+y+3=0 \end{array}\right.$ alors $\left\{\begin{array}{c} x=3y+4 \\ 2x+y+3=0 \end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{c} x=3y+4 \\ 2(3y+4)+y+3=0 \end{array}\right.$

par suite $\left\{\begin{array}{c} x=3y+4 \\ 6y+8+y+3=0 \end{array}\right.$ ainsi $\left\{\begin{array}{c} x=3y+4 \\ 7y+11=0 \end{array}\right.$ d'ou $\left\{\begin{array}{c} x=3\times(\frac{-11}{7})+4 \\ y=\frac{-11}{7} \end{array}\right.$

c'est á dire $\begin{cases} x = \frac{-5}{7} \\ y = \frac{-11}{7} \end{cases}$

Le couple $(\frac{-5}{7}; \frac{-11}{7})$ est la solution du systeme d'équation $\begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$

4.1.3 Méthode par Addition

Cette méthode consiste à multiplier éventuellement l'une ou les deux équations par un ou deux nombres convenables dans le but de supprimer l'une des inconnues en faisant la somme des nouvelles égalités obtenues membres à membres

on avait $\begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \times(-2) \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$

alors on aura $\begin{cases} -2x + 6y + 8 = 0 \ (1) \\ 2x + y + 3 = 0 \ (2) \end{cases}$

faisons la somme $(1) + (2)$ donc on aura $0x + 7y + 11 = 0$ ainsi $y = \frac{-11}{7}$

En remplaçant la valeur de y trouvée dans la première équation on obtient $x - 3\frac{-11}{7} - 4 = 0$ par suite $x + \frac{33}{7} + 4 = 0$ d'ou $x = \frac{-5}{7}$

4.1.4 Méthode par comparaison

Cette méthode consiste à exprimer l'une des inconnues en fontion de l'autre dans les deux équations et à faire la comparaison des deux égalités obtenues de maniere à obtenir une équation du 1er degré à une inconnue.

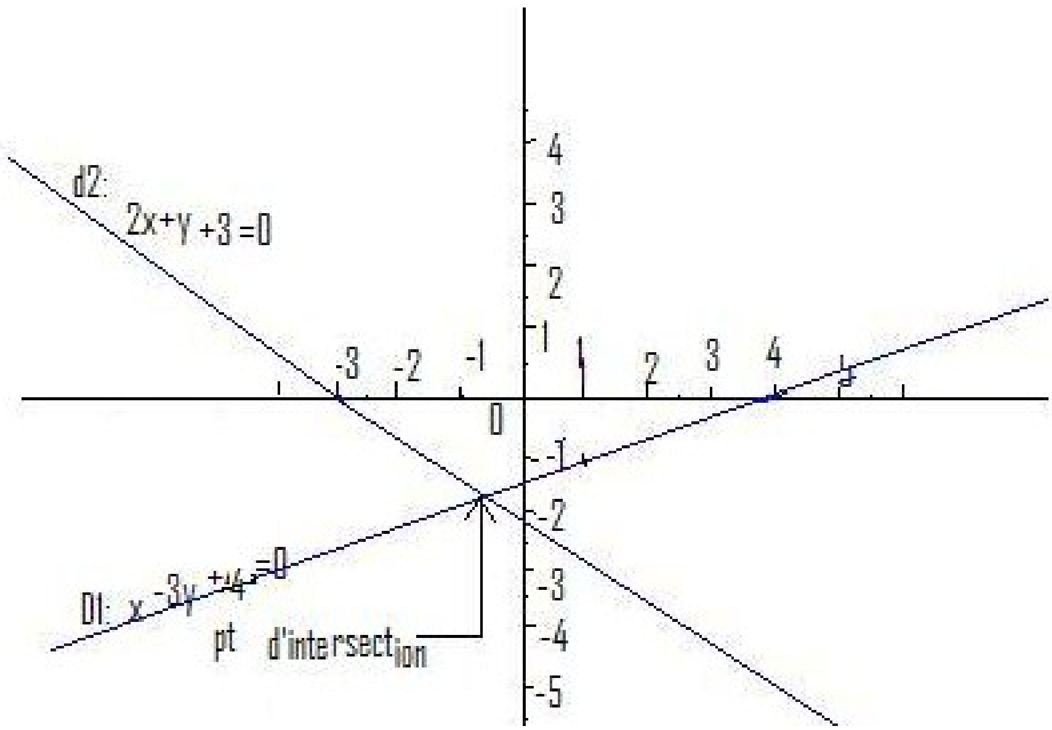
on avait $\begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3y + 40 \\ x = \frac{-y-3}{2} \end{cases}$

donc $3y + 4 = \frac{-y-3}{2}$ ainsi $2(3y + 4) = -y - 3$ ssi $6y + 8 = -y - 3$ ssi $7y = -11$ par suite $y = \frac{-11}{7}$

En remplaçant la valeur de y trouvée dans l'une des nouvelles égalités on aura : $x = 3(\frac{-11}{7}) + 4$ d'ou $x = \frac{-5}{7}$

4.1.5 Résolution graphique ou interprétation

Soient $(D1)$ et $(D2)$ deux droites d'équations du systeme on aura alors : $D1 : x - 3y - 4 = 0$ et $D2 : 2x + y + 3 = 0$



On constate que sur la figure les deux droites $D1$ et $D2$ correspondants aux équations du systeme se coupent en un point.Ce point est la solution graphique du système et il n'est rien d'autre que la solution trouvée au niveau de la résolution par calcule $(\frac{-5}{7}; \frac{-11}{7})$

4.1.6 Résolution de systeme comportant trois équations

Résoudre le système

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \ (1) \\ 2x - y + 2 = 0 \ (2) \\ -x + 3y + 9 = 0 \end{cases}$$

Dans cette genre de système on considère les deux premières équations ((1) et (2)) puis on vérifie la solution dans la troisième équation.

on aura alors $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \times (-1) \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} -x + y + 1 = 0 \ (1) \\ 2x - y + 2 = 0 \ (2) \end{cases}$

ainsi on fait $(1) + (2)$ ce qui va donner $x + 3 = 0$ donc $x = -3$

par suite on aura $-3 - y - 1 = 0$ d'ou $y = -4$

On a déduit que le couple $(-3; -4)$ est la solution du système $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$
On verifie maintenant si le couple $(-3; -4)$ est solution de la troisiéme équation
On a $-(-3) + 3(-4) + 9 = -12 + 12 = 0$ toujours vraie
Alors le couple $(-3; -4)$ est la solution de la troisième équation
d'ou le couple $(-3; -4)$ est la solution du système d'équation $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \\ -x + 3y + 9 = 0 \end{cases}$

4.2 Système D'inéquation

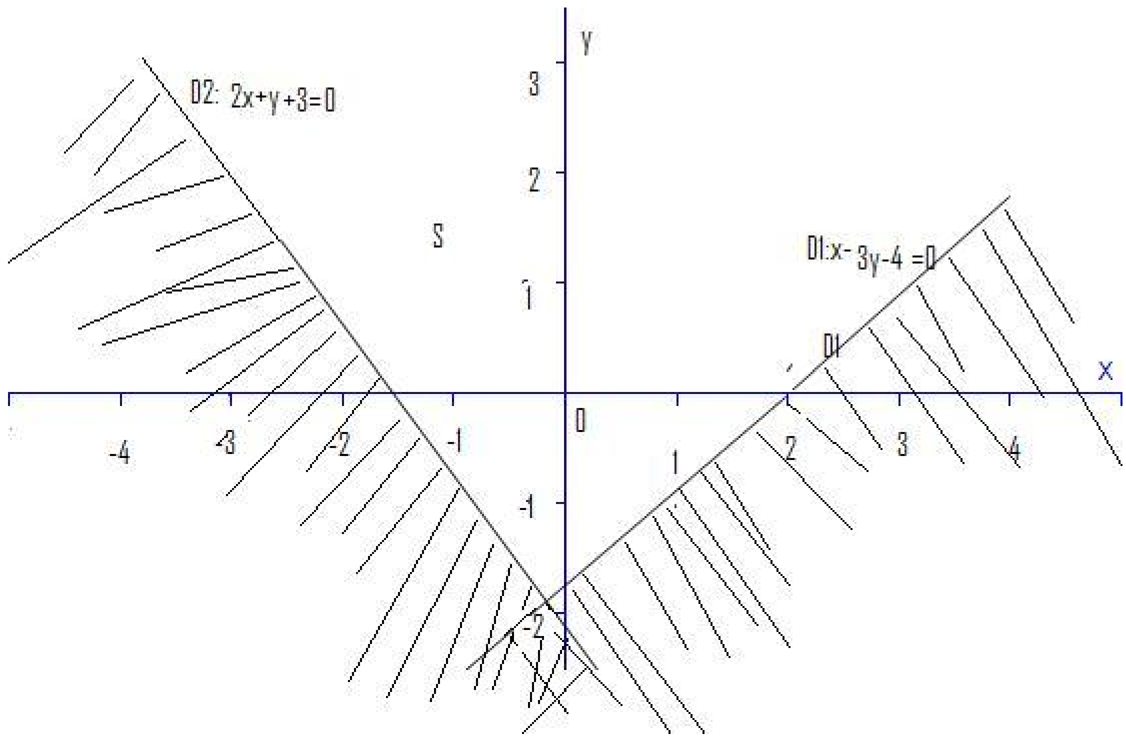
4.2.1 Résolution de système d'inéquation du 1er degré á deux inconnues

Il s'agit d'une combinaison de deux inéquations du premier degré á deux inconnues.
Comme par exemple le système definie par : $\begin{cases} x - 3y - 4 \leq 0 \\ 2x + y + 3 \geq 0 \end{cases}$
$D1 : x - 3y - 4 = 0$ et $D2 : 2x + y + 3 = 0$

	A	B
x	1	4
y	-1	0

	C	D
x	-1	-1,5
y	-1	0

Les deux tableaux ci-dessus nous permettent de tracer respectivement les deux droites $(D1)$ et $(D2)$



On a $O(0;0)$ n'appartient pas dans aucune des deux droites $(D1)$ et $(D2)$.
Il est alors pris comme point de vérification
Pour 1er ineq :$x - 3y - 4 \leq 0$
on aura $0 - 3(0) - 4 = -4 \leq 0$ toujours vraie donc le couple $(0;0)$ est parmi les solutions de cette ineq. C'est pourquoi on hachure l'autre partie
Pour 2eme ineq :$2x + y + 3 \geq 0$
on aura $2(0) + 0 + 3 = 3 \geq 0$ toujours vraie donc le couple $(0;0)$ est parmi les solutions de cette ineq. ainsi on va hachurer l'autre partie
la partie non hachurée dans le plan est la solution graphique du systeme d'inéquation $\begin{cases} x - 3y - 4 \leq 0 \\ 2x + y + 3 \geq 0 \end{cases}$
Remarque :Pour un système d'inéquation à trois inéquations,on trace les trois droites,puis on prend un point particulier (qui n'appartient pas sur aucune de ces droites) comme point de vérification.Apres la solution sera la partie non hachurée.

4.3 Exercices d'Applications

EXERCICES 1 :B.F.E.M 1998

Assane et Ousseynou désirent acheter en commun un magnétoscope qui coûte 20000 frs.Les économies d'Ousseynou représentent les$\frac{4}{5}$ de celle d'Assane. S'ils réunissent leurs économies, Il leur manque 2720 frs pour pouvoir effectuer leur achat.
1/ En prenant x et y comme économies respectives de Assane et Ousseynou, mettre ce problème sous forme d'un système d'équation du premier degrés à deux inconnues.
2/ Calculer alors le montant des économies de chacun des deux garçons.

Chapitre 5

STATISTIQUE

5.1 Introduction

La statistique est la science qui consiste à reunir des données chiffrées,à les analyser,à les commenter et à les critiquer. Une étude statistique s'effectue sur un ensemble appelé **Population**,dont les éléments sont appelés **Individus**,et consiste à observer et étudier un même aspect sur chaque individu,appelé **caractère**.
On distingue deux types de caractère :
-les caractères **qualitatifs** :ce sont les caractères dont les valeurs ne sont pas des nombres(profession,couleur des yeux,ect..)
-les caractère **quantitatif** :ce sont les caractères qui prennent des valeurs numeriques.
le caractère quantitatif est **discret** si les valeurs du caractère sont isolées(ex :nombre d'enfant).Ces valeurs sont appelés **modalités**.
le caractère est **continu** si les valeurs du caractère sont regroupés en intervalles,appelés **Classes**(ex :taille$\in [170; 175]$) ;la largeur de chaque intervalle s'appelle **Amplitude**
Nous recevons chaque jour des informations statistiques sous forme très divers :chiffres,tableaux et graphiques.
On entend souvent parler du taux de scolarisation trés faible des jeunes filles de KAFFRINE,du pourcentage de chômeur dans un pays,du taux de natalités ,de sondage lors des élections présidentielles,ect...
Tous ceux-ci montre l'intéret des donnés statistiques dans la vie de tous les jours.

5.2 Definition classement de donné statistique

A la suite d'un recensement des diamètres en mm d'une série de pièce cylindrique dans une usine.Il a été décelé les diamètres suivants

201 ;203 ;198 ;199 ;197 ;199 ;201 ;199 ;202 ;197
198 ;199 ;200 ;197 ;201 ;200 ;198 ;200 ;200 ;199
202 ;200 ;202 ;200 ;197 ;199 ;200 ;202 ;201 ;197
198 ;199 ;201 ;202 ;201 ;199 ;199 ;200 ;200 ;201

Ce tableau de diamêtre est une série statistique
Afin de faire l'étude statistique nous ordonnons ces donnés dans un tableau faisant apparaitre le nombre de pièce pour chaque diamètre décelé ou le nombre des pièces pour chaque intervalle de diamètre précisé.
on obtient ainsi :

Diamètre en mm	197	198	199	200	201	202	203
nbre de pièce	6	5	10	12	7	8	2

oubien

intervalle de diamètre en mm	[197 ; 199[	[199 ; 201[	[201 ;203[	[203 ;205[
nbre de pièce	11	22	15	2

Les tels tableaux sont appelés les séries statistiques ordonnés
On a dénombrés 50 pièces sur les quelles l'étude a porté.
La population ou éffectif total est de 50 :elle représente l'ensemble sur le quel cette étude a porté
chaque représentant de cette population représente **un individu** dont un groupe de la population caractérise **un échantillon** .
le caractère qui est ici pour notre étude statistique le diamêtre de chaque pièce.
Dans cette série statistique ordonné chaque diamètre représente
une modalité

5.3 Les paramètres de position

5.3.1 Mode Classe modale Fréquence

Mode et Classe modale

On constate au niveau du 1er tableau,la modalité 200 a l'éffectif le plus grand,il est appelé par les statisciens **la mode** de la série statistique.
Concernant la deuxième tableau la classe $[199; 201[$ a le plus grand éffectif,elle est appelée **classe modale** de la série statistique.

Fréquence

Elle nous renseigne sur la position de la mode et de la classe modale.
La fréquence d'une modalité est le quotient de l'éffectif de la modalité par l'éffectif total(multiplié parfois par 100 pour l'avoir en pourcentage).

$$Frquence = \frac{effectif\ de\ la\ modalite}{effectif\ total}(\underbrace{\times 100)}_{pour\ l'avoir\,en\,pourcentage}$$

Diamètre en mm	197	198	199	$\underbrace{200}_{mode}$	201	202	203	total
nbre de pièce	6	5	10	12	7	8	2	50
fréquence en %	12	10	20	24	14	16	4	100

diamètre en mm	[197 ; 199[	$\underbrace{[199; 201[}_{classe\,modale}$	[201 ;203[	[203 ;205[	total
nbre de pièce	11	22	15	2	50
fréquence en %	22	44	30	4	100

5.3.2 Médiane et Effectifs cumulés

Quand la statistique est ordonnés ,il y'a autant de valeur supérieur à la médiane que de valeur inférieur

Méthode de recherche de la médiane

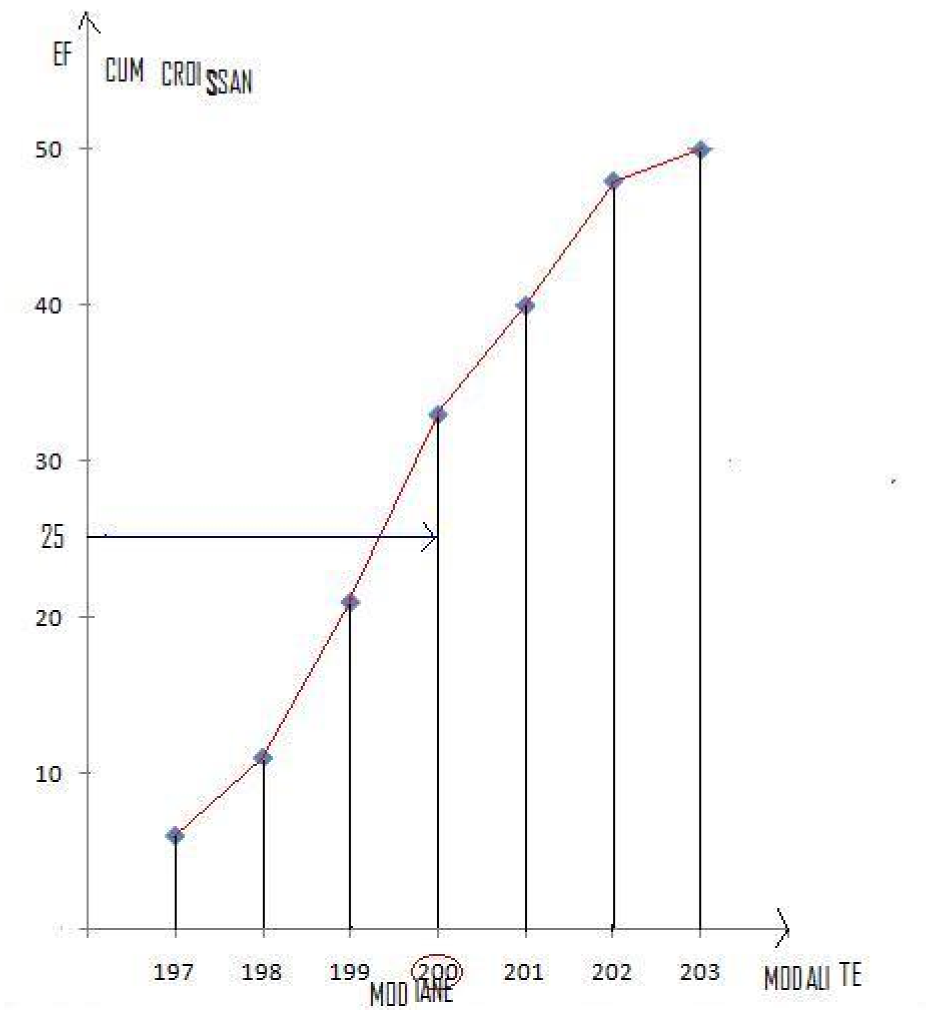
Par calcul :Tableau des effectifs cumulés croissants ou décroisants

modalités	197	198	199	$\underbrace{200}_{Mediane}$	201	202	203
Effectifs	6	5	10	12	7	8	2
Effectifs cum croissants	6	$\underline{11}$	21	33	40	48	50
Effectifs cum décroissants	50	$\underline{44}$	39	29	17	10	2

L'effectif cumulé croissant 11(souligné)nous renseigne sur le nombre de pièce dont le diamètre est inférieur ou égal 198mm.
L'effectif cumulé décroissant 44(souligné) nous renseigne sur le nombre de pièce dont le diamètre superieur ou égale à 198mm.
La 25eme pièce se trouve à la modalité 200.
C'est dans le cadre de la recherche de la médiane.On peut également utiliser le tableau des fréquences cumulés croissantes et décroissantes pour la détermination de la médiane.

modalités	197	198	199	$\underbrace{200}_{Mediane\ 50\%}$	201	202	203
Fréquences	12	10	20	24	14	16	4
Fréquences cum croissantes	12	22	42	66	80	96	100
Fréquences cum décroissantes	100	88	78	58	34	20	4

Par le graphique :diagramme en baton des éffectifs cumulés croissants et des éffectifs cumulés décroissants



Polygone des éffectifs cumulés croissants

5.3.3 Moyenne

La moyenne est le quotient de la somme du produit des éffectifs partiels et des modalités (ou les centres des classes si c'est le cas continu) par léffectif total.
pour la série :

$Moyenne = \frac{6\times197+5\times198+10\times199+12\times200+7\times201+8\times202+2\times203}{50} = \frac{9991}{50} = 199,82$

Remarque

Lorsque le caractère de la série statistique se présente sous forme de classe,on admet que tous les diamètres se regroupent au centre des classes

classe de diamètre	[197 ; 199[	[199 ; 201[	[201 ;203[	[203 ;205[
centre de classe	$\frac{197+199}{2} = 198$	$\frac{199+201}{2} = 200$	$\frac{201+203}{2} = 202$	$\frac{203+205}{2} = 204$
nbre de pièce	11	22	15	2
produits	2178	4400	3030	408

$$moyenne = \frac{2178 + 4400 + 3030 + 408}{50} = 200,32$$

Il est normale que l'on ne trouve pas la même moyenne dans les deux cas.En effet dans la dernière démarche il s'agit d'une approximation liée au centre des classes

conclusion : Les trois valeurs centrales :mode(200),mediane(200)et moyenne(199,82)nous donnent une idée de l'ordre de grandeur des diamètre décelés.

5.4 Représentation graphique

5.4.1 1er type :Diagramme en Baton

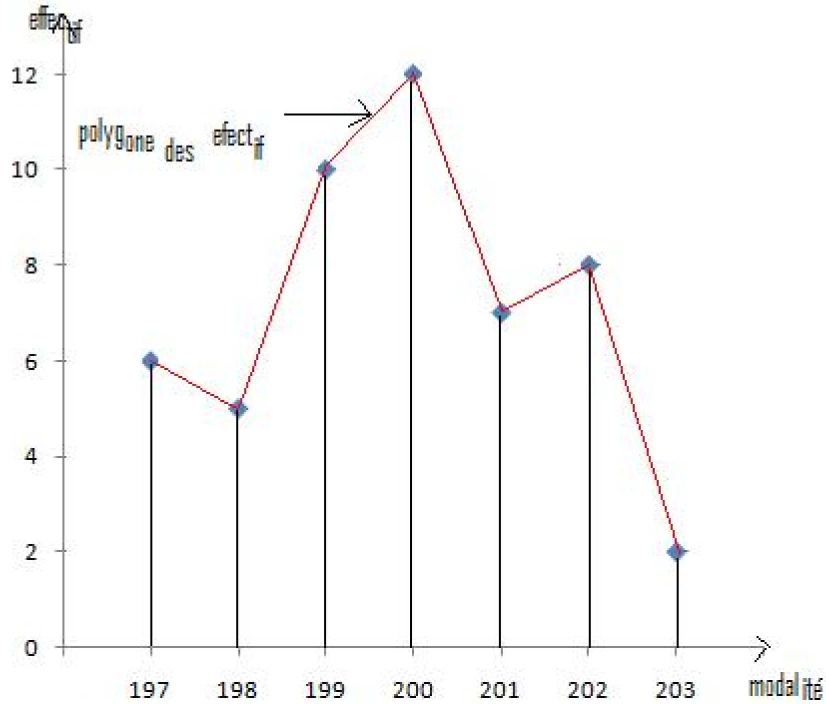


Diagramme en baton

5.4.2 2eme type :Diagramme en Bande ou Histogramme

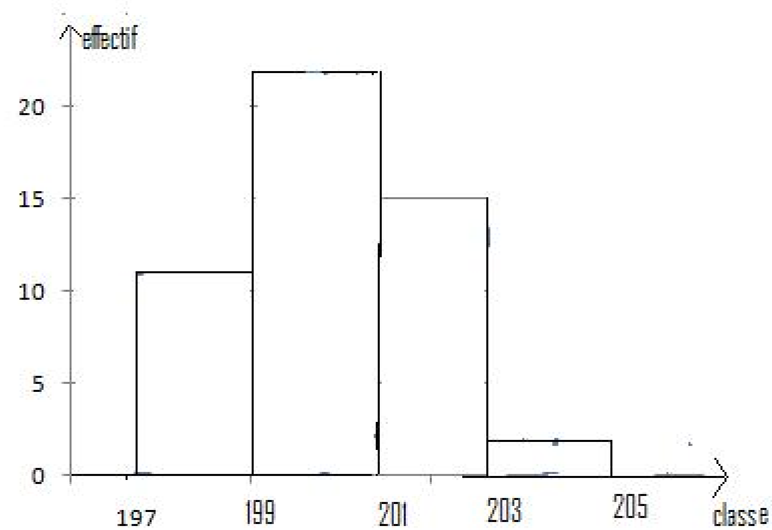


Diagramme en bande ou histogramme

5.4.3 3eme type :Diagramme circulaire et semi-circulaire

Pour construire une diagramme circulaire,if faut éffectuer la régle de trois suivantes :
360 degré $\rightarrow effectiftotal(N)$
$x(angle) \rightarrow effectif\ partiel(n)$

$$x = \frac{360 \times n}{N}$$

Dans le cas de notre problème on calculera l'angle correspondant à chaque éffectif partiel :
Pour la modalité 197 on a $n = 6$ $x = \frac{360 \times 6}{50} = 43,2$ degré
Pour la modalité 198 on a $n = 5$ $x = \frac{360 \times 5}{50} = 36$degré
Pour la modalité 199 on a $n = 10$ $x = \frac{360 \times 10}{50} = 72$degré
Pour la modalité 200 on a $n = 12$ $x = \frac{360 \times 12}{50} = 86,4$degré
Pour la modalité 201 on a $n = 7$ $x = \frac{360 \times 7}{50} = 50,4$degré
Pour la modalité 202 on a $n = 8$ $x = \frac{360 \times 8}{50} = 57,6$degré
Pour la modalité 203 on a $n = 2$ $x = \frac{360 \times 2}{50} = 14,4$degré

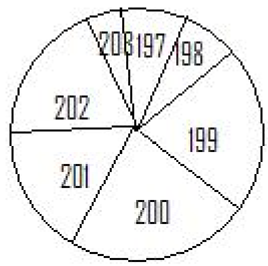


Diagramme circulaire

Remarque :Pour construire le diagramme semi-circulaire,il suffit de multiplier l'effectif partiel(n) par 180 degré et divisé par l'effectif total pour avoir l'angle(x).

$$x = \frac{180 \times n}{N}$$

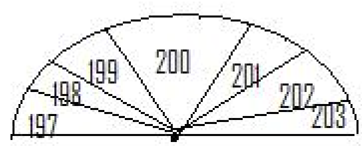


Diagramme sémi-circulaire

5.5 Exercices d'Applications

EXERCICE 1 :B.F.E.M 2009

1. Partie

Le tableau statique ci-dessous donne la répartition de notes d'élèves obtenues lors d'un examen.

Notes	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Effectifs	2	1	1	2	3	2	4	6	7	6	5	3	2	3	2	1
Effectif Cum. Crois. (ECC)	2	3	4	6	9	11	15	21	28	34	39	42	44	47	49	50
Effectif Cum. Décrois. (ECD)	50	48	47	46	44	41	39	35	29	22	16	11	8	6	3	1
Fréquences en %	4	2	2	4	6	4	8	12	14	12	10	6	4	6	4	2
Fréquences Cum. Crois en %	4	6	8	12	18	22	30	42	56	68	78	84	88	94	98	100

1. Que représente chacun des nombres ci-dessous :

a. 3, effectif de la modalité 6,
b. 15, effectif cumulé croissant de la modalité 8,
c. 46, effectif cumulé décroissant de la modalité 5,
d. 98, fréquence cumulée croissante en % de la modalité 16 ?
2. Déduis de ce tableau le pourcentage des élèves qui ont moins de 14.
2. Partie
On regroupe les notes précédentes en classes d'amplitude 4 dans le tableau ci-dessous.

Notes	[0 ; 4 [	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[
Effectifs					
Effectifs Cum. Crois. (ECC)					

1. Recopie et complète le Tableau.
2. Construis l'histogramme des effectifs cumulés croissants.
3. Calcule la moyenne des notes obtenues par ces élève ".

EXERCICE 2 :B.F.E.M 2003

Le tableau ci-dessous représente la répartition des notes de mathématiques lors d'un test de niveau où la note moyenne est 12,5.

Notes sur 20	6	8	9	12	15	x
Nombres d'élèves	6	9	15	9	15	18

1) Calculer x, la meilleure note attribuée lors de ce test.
2) Combien d'élèves ont une note au moins égale à 12 ?
3) Quel est le pourcentage des élèves qui ont au plus 15 ?
4) Déterminer la note médiane
5) Construire le diagramme circulaire de la série

EXERCICE 3 :B.F.E.M 1999

Dans le registre des consultations du dispensaire d'un village, on a relevé les cas du paludisme et on obtient le tableau suivant :

Mois	Janv	Fev	Mars	Avril	Mai	Juin	Juil	Aout	Sept	Oct	Nov	Dec
Nombre de cas Paludisme	21	12	5	4	2	6	13	68	92	53	40	30

1/ Ajouter au tableau la ligne des effectifs cumulés croissants.
2/ Tracer le diagramme en bâtons de cette série (1cm représente 10 malades).
3/ Représenter graphiquement la courbe des effectifs cumulés croissants (2cm représente 50 malades) puis déterminer la période médiane (le mois) pendant laquelle 50% des malades ont été consultés.
4/ En moyenne combien y a-t-il de malades du paludisme par mois ?
5/ Le paludisme est la maladie qui tue le plus au Sénégal.
Sachant que 10.5% des malades paludisme sont décédés et qu'ils représentent 75% de l'ensemble des cas de décès annuels du dispensaire, calculer :
a) Le nombre de décès de malades du paludisme.
b) Le nombre total annuel de malades décédés de ce dispensaire.

EXERCICE 4 :B.F.E.M 2006

Pour préparer une opération tabaski, un éleveur pèse ses 30 moutons afin de les répartir par cathégories de poids, en quatre classes de poids, d'amplitude 4 kg, qu'il désigne respectivement par :
" 4e choix ", 3e choix" , "2e choix" , "1e choix".
le relevé ci-dessous donne le poids en kilogramme des moutons pesés :
50-52-52,2-54,5-52-59-58-55-55,5-56-55-55-57-58-58,5-60
60,5-65-63-60-61-65-64-65-55-59-58-59-59,5-65
1) Donne les classes de cette répartition sachant que la borne inférieure de la première classe de poids est 50.
2) Dresse le tableau des effectifs de la série groupée en classe obtenue. Détermine la classe médiane.
3) On suppose dans la suite que le tableau des effectifs obtenu est :

	4e choix	3e choix	2e choix	1e choix
Classes	[50, 54[	[54, 58[	[58, 62[	[62, 66[
nombre de moutons : effectifs	4	8	12	6

Dessine le diagramme circulaire de cette série.
4) Un mouton" 1e choix " est vendu à 70000 F, un mouton " 2e choix " 65000F et un mouton " 4e choix "52500F.
A combien un mouton " 3e choix " devra t-il être vendu pour que le prix de

vente moyen des moutons soit 62000 F une fois que les moutons seront tous vendus aux prix indiqués.

EXERCICE 5 :B.F.E.M 2002

Un conseil régional ,voulant octroyer 50 bourses annuelles aux meilleurs élèves des classes de troisième de sa localité , organise un concours à cet effet .

Le montant de la bourse dépend de la note obtenue , laquelle varie entre 0 et 20 .Ce montant est fixé au maximum à 30 000 F.

Le tableau ci-dessous résulte de la représentation du diagramme circulaire .

Notes obtenues	[10, 12[	[12, 14[	[14, 16[	[16, 18[	[18, 20[
Montant de la bourse (FCFA)	10000	15000	20000	25000	30000
Angles (degrés)	108	93,6	A	50,4	36

1/ Calculer l'angle manquant A .

2/ Calculer les effectifs associés aux différents intervalles .

3/ Calculer la valeur moyenne de bourse attribuée .

4/ a) Quel est le nombre d'élèves qui ont une note au moins égale à 12 ? En déduire le pourcentage correspondant.

b) Quel est le nombre d'élèves qui ont une bourse au plus égale à 25 000 F ?

5/ a) Construire le polygone des fréquences cumulées croissantes (exprimer les fréquences en pourcentage) .

b) Déterminer la note médiane (en utilisant le théorème de Thalès)

Chapitre 6

APPLICATIONS LINEAIRES ET APPLICATIONS AFFINES

6.1 Rappels :situation de proportionnalités

6.1.1 Exemple

Dans le tableau ci-dessous sont indiqués les distances parcourues par un vehicule en un tempts donné.

Temps en s	5	7	8	10	12	15	20	30	40
distance	100	140	160	200	240	300	400	500	800

On calcule le rapport de la distance sur le temps on a :
$\frac{D}{T} = \frac{100}{5} = \frac{140}{7} = \frac{160}{8} = \frac{240}{12} = \frac{300}{15} = \frac{400}{20} = \frac{800}{40}$
Alors $\frac{D}{T} = 20ms^{-1}$ d'ou $D = 20T$
Le tableau ci-dessus traduit une situation de **proportionnalité** de coefficient de proportionnalité $k = 20$.

6.1.2 Définition

Les réels x,y et z sont respectivements proportionnels aux réels a,b,c si et seulement,il existe k appelé coefficient de proportionnalité tels que $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$

6.1.3 proprieté

Si les réels x et y sont respectivement proportionnels aux réels a et b alors on aura :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{x+y}{a+b} = \frac{x-y}{a-b}$$

Application
trouvez les réels x et y sanchant que $\frac{x}{5} = \frac{y}{3}$ et $x + y = 24$
On a $\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{x+y}{5+3} = \frac{24}{8} = 3$
ainsi $\frac{x}{5} = 3$ et $\frac{y}{3} = 3$ donc $x = 3 \times 5$ et $y = 3 \times 3$
d'ou $x = 15$ et $y = 9$

6.2 Application linéaire

6.2.1 Définition et Exemple

Une application linéaire traduit une situation de proportionnalité.Etant donné un réel a,le procedé qui a tout réel x fait correspondre le réel $y = ax$ s'appelle une application linéaire.On note $x \longmapsto ax$
On désigne ce procedé par f ou g ou h et on écrirera image de $x \longmapsto f(x) = ax$
L'application f définit par $f(x) = ax$ est appelé **application linéaire** de coefficient a
Exemple :les applications f et g définies par $f(x) = 2x$ $g(x) = \sqrt{5}x$ sont des applications linéaires
Contre exemple :les applications h et p définies par $h(x) = 2x + 3$ $p(x) = \sqrt{5x}$ ne sont pas des applications linéaires

6.2.2 Proprietés

Soit $f(x) = ax$ une application linéaire ,$x1$,$x2$,$x3$ trois réels et $y1$,$y2$,$y3$ leurs images respectives par f on a :$y1 = ax1$;$y2 = ax2$;$y3 = ax3$ alors $a = \frac{y1}{x1} = \frac{y2}{x2} = \frac{y3}{x3}$
soit $f(x1 + x2) = a(x1 + x2) = ax1 + ax2 = f(x1) + f(x2)$
Dans une application linéaire l'image d'une somme est égal à la somme des

images.

$$f(x1 + x2) = f(x1) + f(x2)$$

soit $f(kx) = a(kx) = k(ax) = kf(x)$ avec $k \in \Re$

$$f(kx) = kf(x)$$

6.2.3 Sens de variation

Etudier le sens de variation d'une application linéaire, c'est cherché si elle est croissante, décroissante ou constante.

application linéaire croissante

une application linéaire f définie par $f(x) = ax$ est dite croissante si et seulement si quelque soit $x1$ et $x2$ réels $x1 \prec x2$ ona $f(x1) \prec f(x2)$
remarque :une application linéaire est croissante si son coefficient linéaire (a) est positif.
En effet :soit $f(x1) = ax1$ et $f(x2) = ax2$ on a $f(x1) \prec f(x2)$ implique $ax1 \prec ax2$ ssi $ax1 - ax2 \prec 0$ ssi $a(x1 - x2) \prec 0$
comme $x1 - x2 \prec 0$ car $x1 \prec x2$ alors $a \succ 0$

application linéaire décroissante

une application linéaire f définie par $f(x) = ax$ est dite décroissante si et seulement si quelque soit $x1$ et $x2$ réels $x1 \prec x2$ ona $f(x1) \succ f(x2)$
remarque :une application linéaire est décroissante si son coefficient linéaire (a) est négatif.
En effet :soit $f(x1) = ax1$ et $f(x2) = ax2$ on a $f(x1) \succ f(x2)$ implique $ax1 \succ ax2$ ssi $ax1 - ax2 \succ 0$ ssi $a(x1 - x2) \succ 0$
comme $x1 - x2 \prec 0$ car $x1 \prec x2$ alors $a \prec 0$

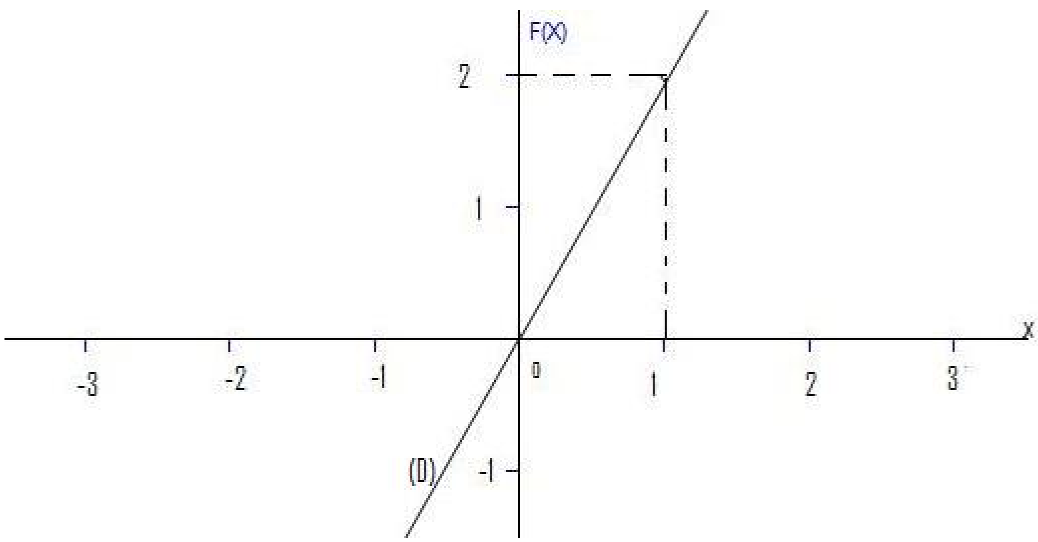
application linéaire constante

une application linéaire f définit par $f(x) = ax$ est dite constante si et seulement si quelque soit $x1$ et $x2$ différents ona $f(x1) = f(x2)$
remarque :une application linéaire est constante si son coefficient linéaire

(a) est égal zéro.
En effet :soit $f(x1) = ax1$ et $f(x2) = ax2$ on a $f(x1) = f(x2)$ implique $ax1 = ax2$ ssi $ax1 - ax2 = 0$ ssi $a(x1 - x2) = 0$
comme $x1 \neq x2$ alors $a = 0$

6.2.4 Représentation graphique

la représentation d'une application linéaire est une droite passant par l'origine du repère O et le point de coordonnée $(1; a)$
Exemple : soit $f(x) = 2x$ ainsi soit $(D) : y = 2x$



Représentation graphique d'une application linéaire

6.3 Applications Affines

6.3.1 Définition et Exemple

Etant donés deux réels a et b,le procedé qui a tout réel x fait correspondre le réel $y = ax + b$ s'appelle une application affine.
On note $x \longmapsto y = ax + b$
On designe ce procedé par f (ou h ou g...) et on écrira (image de x)$\longrightarrow$ $f(x) = ax + b$
l'application définie $f(x) = ax + b$ est une application affine.
Exemple :Les applications f et g définie par $f(x) = 7x + 8$ et $g(x) = 5$ sont

des applications affines.
Remarque :Toute application linéaire est une application affine
Contre exemple :les applications f et g définies par $f(x) = 7x^2 + 8$ et $g(x) = \sqrt{7x}$ ne sont pas des applications affines.

6.3.2 Application linéaire associée

On appelle application linéaire f associée à une application affine g definie par $g(x) = ax + b$,l'application linéaire définie par $f(x) = ax$.

6.3.3 Sens de variation

voir application linéaire c'est le même procedé

6.3.4 représentation graphique

Soit f une application affine definie par $f(x) = ax + b$.Représentée graphiquement f c'est représenté la droite (D) d'equation $y = ax + b$
Pour représenter la droite (D) il suffit de chercher deux points A et (B) dont les coordonnées vérifient l'equation de la droite.

6.4 Application affine par intervalles

6.4.1 Exemple et définition

Soit f une application définie par $f(x) = |2x - 6|$
on a $2x - 6 \leq 0$ ssi $2x \leq 6$ ssi $x \leq 3$
Alors si $x \leq 3$, $f(x) = -(2x - 6)$,$f(x) = -2x + 6$
et $x \geq 3$,$f(x) = 2x - 6$
Ainsi si $x \leq 3$,l'application f définie par $f(x) = -2x + 6$ est une application affine.
De plus si $x \geq 3$,l'application f définie par $f(x) = 2x - 6$ est une application affine.

D'ou l'application f définie par $f(x) = |2x - 6|$ application affine par intervalles.

6.4.2 Sens de variation

Le sens de variation d'une application affine par intervalles est alors donné en fontion des intervalles définies.
si $x \leq 3$ alors $f(x) = -2x + 6$ est une application affine décroissante.
si $x \geq 3$ alors $f(x) = 2x - 6$ est une application affine croissante.
Le sens de variation d'une application affine par intervalles est alors donné sous forme de tableau appelé **Tableau de variation**

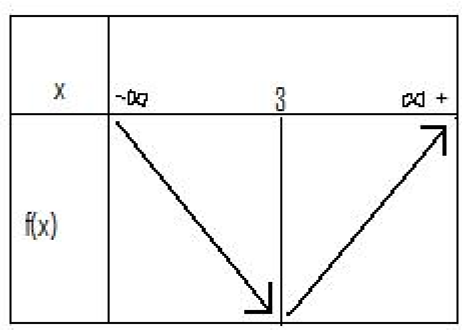


Tableau de Variation

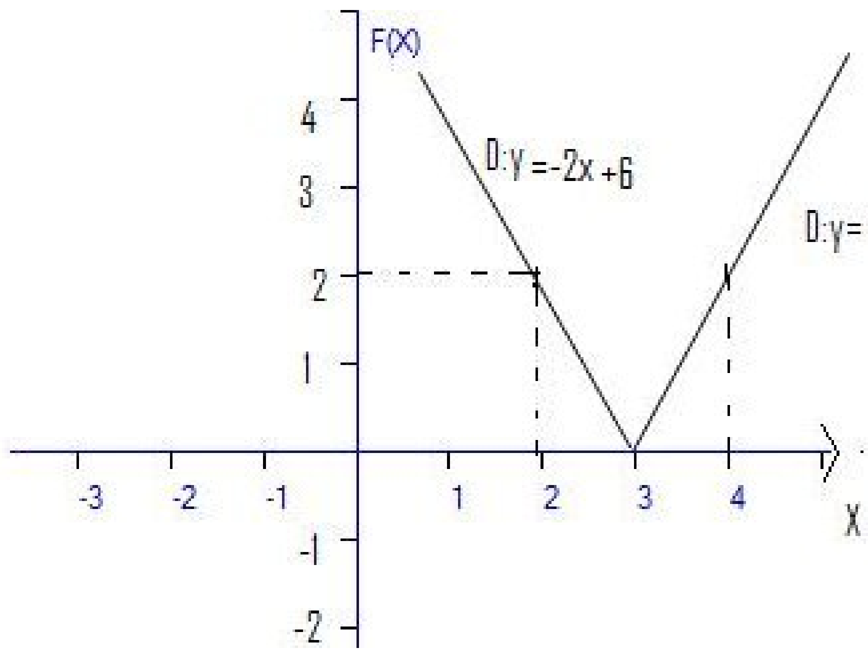
6.4.3 Représentation graphique

Représenter graphiquement une application affine par intervalle c'est de représenter,les applications affine dans leur intervalles bien précises.
si $x \in]-\infty; 3]$ on a $f(x) = -2x + 6$
Représenter graphiquement f définie par $f(x) = -2x + 6$ dans $]-\infty; 3]$ c'est représenté la droite $(D) : y = -2x + 6$.

	A	B
x	2	3
y	2	0

si $x \in [3; +\infty[$ on a $f(x) = 2x - 6$
Représenter graphiquement f définie par $f(x) = 2x - 6$ dans $[3; +\infty[$ c'est représenté la droite $(D) : y = 2x - 6$

	B	C
x	3	4
y	0	2



représentation d'une application affine par intervalles

remarque :La représentation graphique de l'application affine par intervalle f définie par $f(x) = |2x - 6|$ est donné par l'union des deux demi droites.

6.5 Exercices d'Applications

EXERCICES 1 :B.F.E.M 2010

Un commerçant fixe le prix de vente de chacun de ses articles en prévoyant un bénéfice de 25 % sur le prix d'achat.
Soit x le prix d'achat d'un article et p son prix de vente.
1. Justifie que : $p = \frac{5}{4}x$.
2. Calcule le prix de vente d'un article acheté à 400 F.
3. Calcule le prix d'achat d'un article vendu à 1250 F.
4. Représente graphiquement dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, où 1 cm représente 100 F, l'application qui à x associe p.

5. Détermine graphiquement le prix d'achat d'un article vendu à 750 F.

EXERCICES 2 :B.F.E.M 2003

On considère les expressions suivantes :

$$H(x) = 4(x+\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3}(x+\sqrt{3}) + 3$$
$$G(x) = (2x+\sqrt{3})^2$$

1) Développer, réduire et ordonner $H(x)$ et $G(x)$.
2) En déduire une factorisation de $H(x)$.
3) On pose $Q(x) = \sqrt{H(x)}$
a) Résoudre l'équation $Q(x) = 2\sqrt{3}$
b) Dans un repère orthonormal $(o, \vec{i}, \vec{j})$, représenter Q.

EXERCICES 3 :B.F.E.M 2004

1) Pour organiser une colonie de vacances pour les 50 enfants de ses employés, une société établie à Dakar lance un appel d'offre auquel 3 agences de transport A, B et C ont soumissionné :

- l'agence A réclame pour chacun de ses cars un forfait de 30000 F et 500 F pour chaque kilomètre parcouru.

- l'agence B réclame pour chacun de ses cars un forfait de 40000F et 300 F pour chaque kilomètre parcouru

- l'agence C réclame 64000 F pour chacun de ses cars.

a) Etablir la rélation exprimant la somme y à payer en fonction du nombre x de kilomètres parcourus pour chacune des 3 agences.
b) Dans un même repère orthonormal (1 cm pour 10 km en abscisses et 1 cm pour 10000 F en ordonnées), représenter graphiqement les 3 relations précédemment obtenues.
c) Déterminer graphiquement sur quelle longueur de trajet :

- L'agence A réclame plus que l'agence B ;

- L'agence A et l'agence C réclament la même somme

- L'agence B réclame moins que l'agence C.

2) Les enfants sont répartis en deux groupes :

- le premier groupe va à Thies, ville distante de 70 km de Dakar.

- le deuxième groupe va à kaolack, ville distante de 192 km de Dakar.

a) indiquer sur chacun de ses deux trajets l'agence la moins chère qui sera retenue
b) Quelle est l'agence qui n'aura aucune part de ce marché ? Pourquoi ?
3) Deux cars sont prévus pour le voyage sur Kaolack et cinq cars pour le voyage sur Thies.
Si chacun des enfants du premier groupe verse 5000 F et chacun des enfants du deuxième groupe verse 3000 F, alors la société devra compléter pour 223 000F pour couvrir les frais de transport.
Quel est le nombre d'enfants qui composent chaque groupe ?
EXERCICES 4 :B.F.E.M 2005
Le gérant d'un cyber café propose à ses clients deux types d'options
Option I : 150 F par heure d'utilisation (navigation) avec un abonnement mensuel de 3000 F ;
Option II : 350 F l'heure d'utilisation sans abonnement.
1) En notant x le nombre d'heures de navigation mensuelle, $p1(x)$ et $p2(x)$ les prix en francs correspondants respectivement aux options I et II, montrer que $p1(x) = 150x + 3000$ et $p2(x) = 350x$.
2) Dans un même repère (o,$\vec{i}$,$\vec{j}$) construire les représentations graphiques des applications affines $p1$ et $p2$ On prendra : 1cm pour 1000F sur l'axe des ordonnées et 1cm pour 2h sur l'axe des abscisses
3) Déterminer graphiquement dans quel intervalle de temps l'option I est plus avantageuse que l'option II et retrouver cet intervalle par calcul.
4) Au bout de combien de temps de navigation deux clients d'options différentes payeront-ils le même prix ?
EXERCICES 5 :B.F.E.M 2006
On donne les expressions :$f(x) = (3x - 1)^2 - (1 - 3x)(x - 6)$
et $g(x) = 3(9x^2 - 1) + (x - 1)(3x - 1) - 2x + 6x^2$
1) Développe, réduis et ordonne $f(x)$ et $g(x)$.
2) Factorise $f(x)$ et $g(x)$ 3) Calcul $g(\sqrt{3})$ puis l'encadrer à 10^{-1} prés sachant que $1,732 \prec \sqrt{3} \prec 1,733$
4) Montre que l'application h définie sur $\Re$ par :$h(x) = f(x) - (12x^2 - 27x + 4)$ est une application affine puis indique en le justifiant, son sens de variation.

5) Représente graphiquement dans un repère orthonormal (o, $\vec{i}$,$\vec{j}$) l'application q définie par $q(x) = |2x + 3|$

ACTIVITES GEOMETRIQUES

Chapitre 7

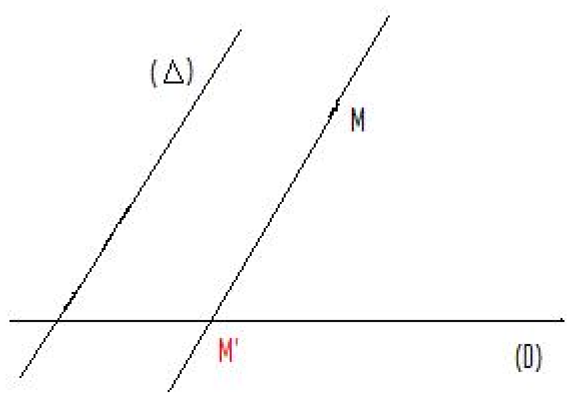
PROJECTION ET THEOREME DE THALES

7.1 Projection

7.1.1 Projeté d'un point sur une droite

Definition

Soient (Δ) et (D) deux droites sécantes et M un point du plan.La parallèle à (Δ) passant par M coupe (D) en M'.M' est le projeté de M sur (D) parallèlement à (Δ).on note $p(M) = M'$



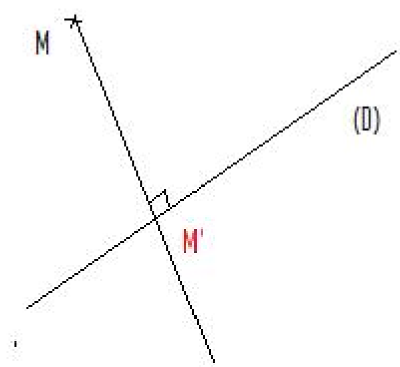
Proprietés

Le projeté d'un segment est un segment qui peut être réduit à un point.
Le projeté du milieu d'un segment est le milieu du segment image.C'est à dire
Si I milieu de $[AB]$ et $p(A) = A'$ et $p(B) = B'$ et $p(I) = I'$ alors I' est le milieu de $[A'B']$
La projection ne conserve pas les distances.

7.1.2 La projection orthogonale

Définition

Soit (D) une droite du plan et M un point de ce plan.Pour faire la projection orthogonale du point M sur la droite (D),on trace une droite passant par le point M et perpendiculaire à la droite (D) en un point M'.Ce point M' est appelé le projeté orthogonal du point M sur la droite (D).On note $p\perp(M) = M'$



proprietés

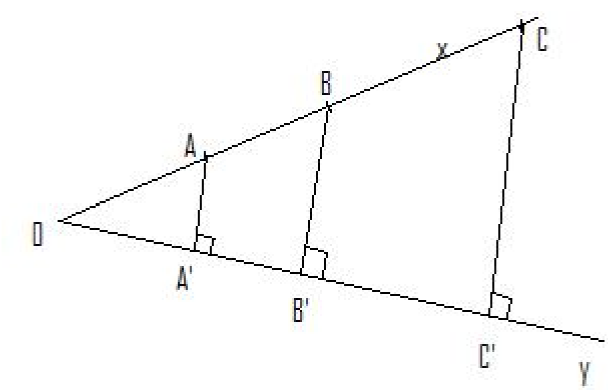
-Si M appartient à (D) alors M est son propre projeté orthogonal.
-Le projeté orthogonal d'un segment est un segment qui peut être réduit à un point.
-La projection orthogonale ne conserve pas les longueurs.
-La projection orthogonale conserve le milieu.

Rapport de projection orthogonale

Activités

Soient $[ox)$ et $[oy)$ deux demi droites de même origine tel que $\widehat{xoy}$ soit un angle aigu.
1)Sur la démi droite $[oy)$ placer les points A,B et C telque $OA = 20cm$,$OB = 40cm$ et $OC = 80cm$
2)Tracer les points A',B' et C' projetés orthogonaux respectifs des points A,B et C sur le support de la demi droite $[ox)$.
Aprés avoir mesuré les longueurs OA',OB' et OC'.
Comparer les rapports $\frac{OA'}{OA}$; $\frac{OB'}{OB}$; $\frac{OC'}{OC}$; $\frac{A'B'}{AB}$; $\frac{A'C'}{AC}$; $\frac{B'C'}{BC}$.

solution

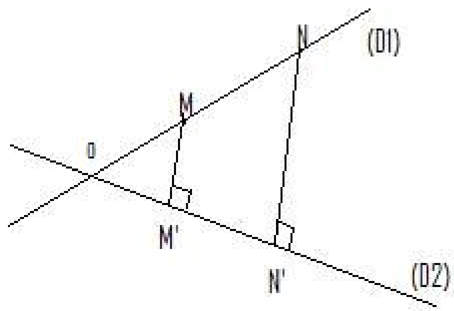


3)Apres avoir mesuré on a $OA' = 10$,$OB' = 20$ et $OC' = 40$.
attention : la figure ci-dessus ne reflète pas les dimentions réels ci-dessus.
on aura les rapports $\frac{OA'}{OA} = \frac{10}{20} = 0,5$;$\frac{OB'}{OB} = \frac{20}{40} = 0,5$; $\frac{OC'}{OC} = \frac{40}{80} = 0,5$;$\frac{A'B'}{AB} = \frac{10}{20} = 0,5$;$\frac{A'C'}{AC} = \frac{30}{60}$;$\frac{B'C'}{BC} = \frac{20}{40}$.
Donc $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$.

Définition

Soients $(D1)$ et $(D2)$ deux droites du plan,M et N deux points de $(D1)$ et M' et N' leurs projetés orthogonaux respectifs sur la droites $(D2)$.
On appelle rapport de projection orthogonale de la droite $(D1)$ sur la droite

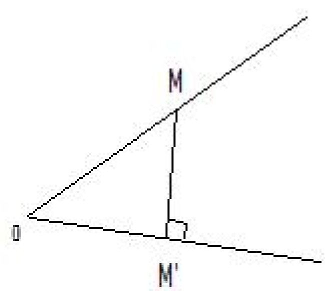
$(D2)$ noté $r = \frac{M'N'}{MN}$
$r = \frac{OM'}{OM} = \frac{ON'}{ON} = \frac{M'N'}{MN}$



Remarque
Le rapport de projection orthogonale est indépendant de la position des points M et N mais dépend uniquement de la position des droites $(D1)$ et $(D2)$.

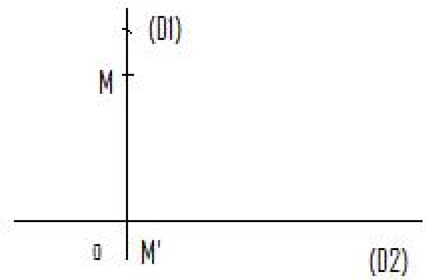
Valeur du rapport

Soit r le rapport de projection orthogonale de deux droites $(D1)$ et $(D2)$.
Cas ou les deux droites sont sécantes



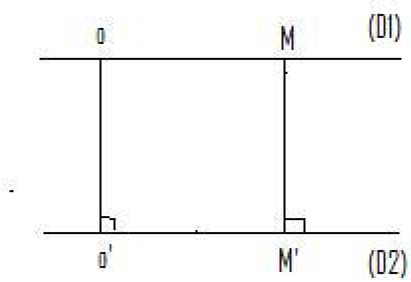
Soit M un point de $(D1)$ et M' son projeté orthogonal sur la droite $(D2)$.On a $r = \frac{OM'}{OM}$.or on a OMM' est un triangle rectangle en M'.
Alors $OM' \prec OM$ donc $\frac{OM'}{OM} \prec \frac{OM}{OM}$ ie $\frac{OM'}{OM} \prec 1$ d'ou $0 \leq r \prec 1$.

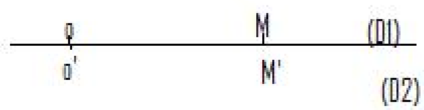
Si de plus $(D1)$ et $(D2)$ sont perpendiculaire.



On aura $r = \frac{OM'}{OM} = \frac{0}{OM} = 0$ car le point M' est égal au point O $(M' = O)$

Cas ou les deux droites sont parallèles ou confondues

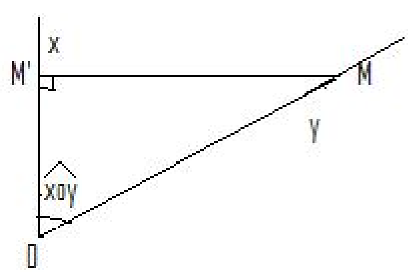




$r = \frac{O'M'}{OM} = \frac{OM}{OM} = 1$ car $O'M' = OM$

Cosinus d'un angle

Soit $\widehat{xoy}$ un angle aigu.
On appelle **Cosinus** de l'angle $\widehat{xoy}$ noté $cos\widehat{xoy}$,le rapport de projection orthogonale des deux demi droites $[ox)$ et $[oy)$.

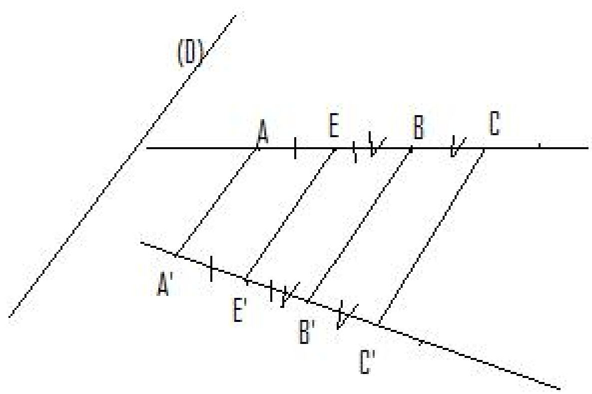


7.2 Théorème de THALES

7.2.1 Activités

Activités 1

Soit (X) et (Y) deux droites sécantes et (D) une droite non paralleles à (X) et (Y).
Soient A ,B,C et E quatre points de la droite (X) tels que E milieu de $[AB]$ et B milieu de $[EC]$.
Soient A',B',C' et E' les projetés respectifs des points A ,B,C et E sur (Y) parallelement á (D).
a)Exprimer AB et AC en fonction de AE puis $A'B'$ et $A'C'$ en fonction $A'E'$.
b)Comparer les rapports suivants :$\frac{AB}{AC}$ et $\frac{A'B'}{A'C'}$;$\frac{AB}{BC}$ et $\frac{A'B'}{B'C'}$; $\frac{BC}{AC}$ et $\frac{B'C'}{A'C'}$.
solution



a)Exprimons AB et AC en fonction de AE puis $A'B'$ et $A'C'$ en fonction $A'E'$.
On a par hypothése :E milieu de $[AB]$ alors $AB = 2AE$.
de plus B milieu de $[EC]$ alors $EB = BC$ donc $EB = BC = AE$ d'ou $AC = 3AE$
or on a dit que la projection conserve le milieu
Donc on a E' milieu de $[A'B']$ et B' milieu de $[E'C']$
par anologie on aura $A'B' = 2A'E'$ et $A'C' = 3A'E'$
b)Comparons les rapports :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{2AE}{3AE} = \frac{2}{3}; \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{2A'E'}{3A'E'} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

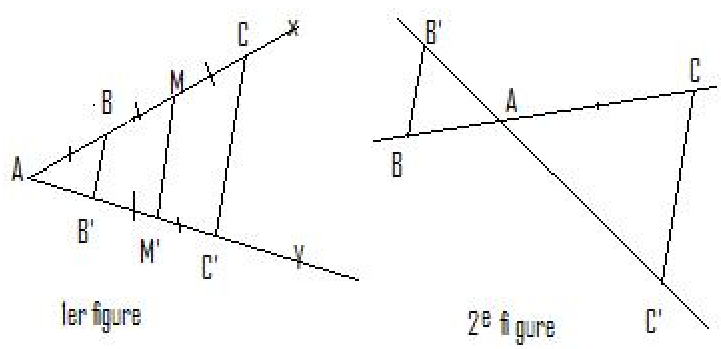
.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{2AE}{AE} = 2; \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{2A'E'}{A'E'} = 2 \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

.

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AE}{3AE} = \frac{1}{3}; \frac{B'C'}{A'C'} = \frac{A'E'}{3A'E'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

. **Activités 2**
Soient (X) et (Y) deux droites sécantes en A.
Soient B et C deux points de (X) tel que $AC = 3AB$.
Soient B' et C' deux points de (Y) tel que $(BB') \| (CC')$.
Démontrer que $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$.
solution



Soit M milieu de $[BC]$ et comme $AC = 3AB$ alors $AB = BM = MC$ bonc B milieu de $[AM]$.
Soit M' le projeté de M sur (Y) parallèlement à (BB').
on aura d'aprés le théoreme du projeté de milieu d'un segment
M' milieu de $[B'C']$ et B' milieu de $[A'M']$ d'ou $AC' = 3AB'$
Ainsi $\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{3AB} = \frac{1}{3}$ et $\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB'}{3AB'} = \frac{1}{3}$.
Donc

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$$

7.2.2 Enoncé du théorème de THALES

Si on coupe deux droites sécantes par deux parallèles alors on obtient sur ces sécantes des longueurs proportionnelles.

Qu'alors on peut appliquer le théorème de THALES.

SI	A,B,C alignés d'une part A',B',C' alignés d'autre part et $(AA')\|(BB')$ $(BB')\|(CC')$	$ALORS$	a) $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ b) $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ c) $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$

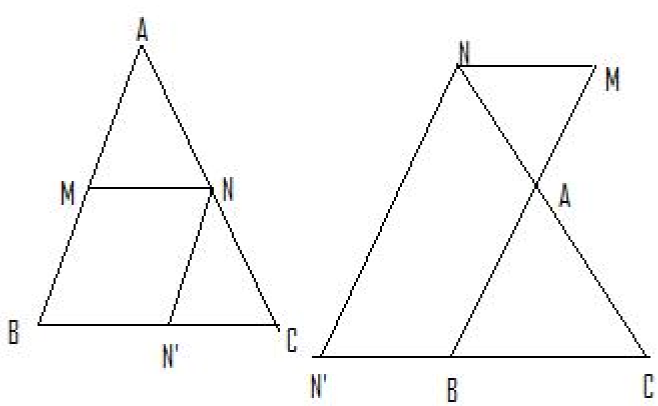
Les longueurs AB et $A'B'$ sont dites respectivement proportionnelles aux longueurs AC et $A'C'$.

7.2.3 Application du théorème de THALES au Triangle

Activités Soient ABC et AMN deux triangles obtenues en coupant deux droites sécantes en A par deux paralléles (MN) et (BC).
Soit N' le projeté de N sur (BC) parallèlement à (AB)
Démontrer que

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

solution



Les sécantes (AB) et (AC) sont coupées par les paralléles (MN) et (BC) alors les triangles ABC et AMN sont en position de THALES.

Donc d'apres le théorème de THALES ona :

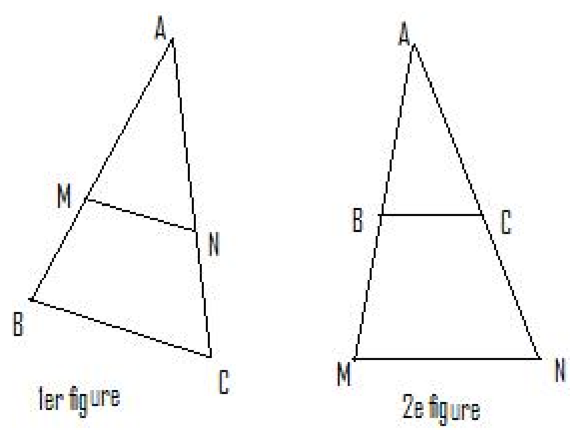
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

N' le projeté de N sur (BC) parallèlement à (AB) alors $(NN') \| (AB)$
Donc les sécantes (AC) et (BC) sont coupés par les parallèles (NN') et (AB)
Ainsi les triangles CNN' et CAB sont en position de THALES.
D'aprés le théorème de THALES on aura :$\frac{AN}{AC} = \frac{BN'}{BC}$.
or $BMNN'$ est un parallélogramme car $(MN) \| (BN')$ et $(NN') \| (MB)$
Donc $BN' = MN$ d'ou

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

7.2.4 Théorème

Si deux triangles sont en position de THALES alors les longueurs des côtés correspondants sont proportionnels.
AUTRE FORMULATION
Si deux triangles sont en position de THALES alors l'un est un **agrandissement** de l'autre ou l'un est une **réduction** de l'autre.



Dans la première figure le triangle AMN est une réduction de ABC.
Dans la deuxieme figure le triangle AMN est un agrandissement de ABC.

7.2.5 Réciproque du théorème de THALES dans le cas du triangle

Enoncé de la réciproque de THALES
Si A,M,B sont alignés d'une part et les points A,N,C alignés d'autre part dans le même ordre.et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$
Alors les droites (MN) et (BC) sont **parallèles**.

7.3 Exercices d'Applications

Exercice 1 : B.F.E.M 1999
On donne trois points, E,G et H alignés, dans cette ordre, sur une droite D tels que :
$EG = 1$ et $EH = x$;$x \in \Re+$ Sur une droite (Δ) passant par E et distinct de (D) on prend deux points M et N tels que (GM) soit paralléle à (HN) et un point F tel que (FM) soit paralléle à (GN).
1/ Faire la figure.
2/ Montrer que $EG^2 = EF \times EH$
3/ Calculer EF en fonction de x.

Chapitre 8

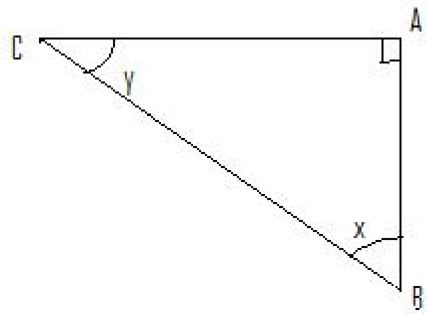
RELATION TRIGONOMETRIQUE DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

8.1 Rappels

soit ABC un triangle quelconque et x,y et z les angles respectifs de $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$,$\widehat{BAC}$.
✍ La somme des angles d'un triangle est égale 180 degré.ie $x + y + z = 180$
✍ Dans un triangle quelconque on a toujours au moins deux angles aigus.
✍ Deux angles sont dits complémentaires si leur somme est égale à 90 degré.
✍ Deux angles sont dits supplémentaires si leur somme est égale à 180 degré.
✍ Dans un triangle rectangle on a toujours deux angles aigus complémentaires.

8.2 Cosinus et Sinus d'un angle aigu

Soit ABC un triangle rectangle en A et x,y les angles aigus correspondants respectives aux angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.



on dira que le côté $[AB]$ est le côté **adjacent** à l'angle x et le côté $[AC]$ son côté opposé.
De maniere analogue le côté $[AB]$ sera dit côté opposé à l'angle y et le côté $[AC]$ son côté opposé.

8.2.1 Cosinus d'un angle aigu

Le cosinus de l'angle x du triangle ABC rectangle en A est défini comme étant le rapport de projection des droites (AB) et (BC) :C'est le quotient $\frac{AB}{BC}$ on note $\cos x = \frac{AB}{BC}$.
Comme AB et BC sont respectivement les mesures du côté adjacent $[AB]$ et de l'hypoténuse $[BC]$.on a :

$$\cos x = \frac{mesure\ du\ cote\ adjacent}{mesure\ de\ l'hypotenuse} = \frac{AB}{BC}$$

De maniére analogue on aura $\cos y = \frac{AC}{BC}$

8.2.2 Sinus d'un angle aigu

Le Sinus de l'angle x du triangle ABC rectangle en A est défini comme étant le rapport de la mesure de son côté opposé sur l'hypoténuse. on note $\sin x = \frac{AC}{BC}$

$$\sin x = \frac{mesure\ cote\ oppose}{mesure\ de\ l'hypotenuse}$$

De maniére analogue on aura $\sin y = \frac{AB}{BC}$
Remarque
On a $AC \prec BC$ alors $0 \leq \sin y \leq 1$.le sinus d'un angle est toujours inférieur à 1.

8.3 Tangente d'un angle aigu

La tangente de l'angle x du triangle ABC rectangle en A est définie comme étant le rapport de la mesure de son côté opposé sur le côté adjacent.On note

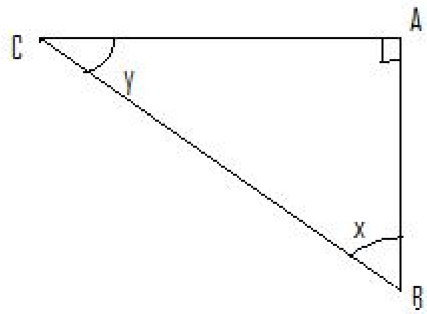
$$\tan x = \frac{mesure\ du\ cote\ oppose}{mesure\ du\ coteadjacent}$$

c'est à dire $\tan x = \frac{AC}{AB}$ De maniére analogue $\tan y = \frac{AB}{AC}$.
Remarque
on a $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{BC} \times \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AB}$ d'ou

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

8.4 Relation entre cosinus et sinus d'un angle aigu

Soit ABC un triangle rectangle en A.Et x,y les angles correspondants respectivement $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$



D'aprés le théoreme de Pythagore on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$
En divisant par BC^2 ,on obtient
$\frac{AB^2+AC^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = 1$
donc $(\frac{AB}{BC})^2 + (\frac{AC}{BC})^2 = 1$ or $\cos x = \frac{AB}{BC}$ et $sinx = \frac{AC}{BC}$
Par suite $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ en posant $(\cos x)^2 = \cos^2 x$ et $(\sin x)^2 = \sin^2 x$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

8.5 Cosinus et Sinus d'angle complémentaire

Sachant que dans un triangle rectangle on a toujours deux angles aigus complémentaires .donc x et y sont ici deux angles complémentaires.
On avait $\sin x = \frac{AC}{BC}$ et $\cos x = \frac{AB}{BC}$
$\sin y = \frac{AB}{BC}$ et $\cos y = \frac{AC}{BC}$
On constate que $\sin x = \cos y$ et $\sin y = \cos x$
on avait $\tan x = \frac{AC}{AB}$ et $\tan y = \frac{AB}{AC}$ alors $\tan x = \frac{1}{\tan y}$
On a conclu alors si deux angles sont complémentaires alors le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre et la tangente de l'un est égale à l'inverse de l'autre.

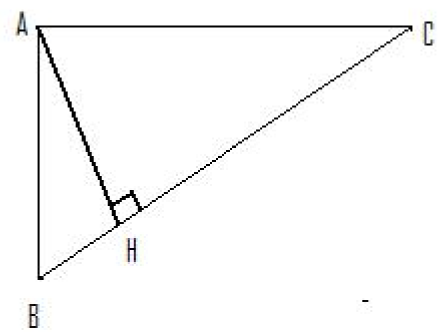
8.6 Sinus,Cosinus,tangente d'angle remarquable

Angles	0	30	45	60	90
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangentes	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	indéfini

8.7 Relation métrique dans un triangle rectangle

8.7.1 Théorème de PYTHAGORE

soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC)



Soit r le cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$.Puis que H est le projeté orthogonal de A sur (BC) alors ABH est un triangle rectangle en H.Ainsi on peut exprimer r de deux maniéres différentes. on a $r = \frac{BH}{AB}$ ou $r = \frac{AB}{BC}$
donc $BH = r \times AB$ et $AB = r \times BC$ d'ou $BH = r \times (r \times BC)$

$$BH = r^2 \times BC(1)$$

soit r' le cosinus de l'angle $\widehat{ACB}$.De même ACH est un triangle rectangle en H. $r' = \frac{CH}{AC}$ ou $r' = \frac{AC}{BC}$.
donc $CH = r' \times AC$ et $AC = r' \times BC$ d'ou $CH = r' \times (r' \times BC)$

$$CH = r'^2 \times BC(2)$$

De plus $BC = BH + HC$ Ainsi on obtient $BC = r^2 \times BC + r'^2 \times BC$ donc $BC = (r^2 + r'^2)BC$ d'ou $r^2 + r'^2 = 1$ or $r = \frac{AB}{BC}$ et $r' = \frac{AC}{BC}$ donc

$1 = (\frac{AB}{BC})^2 + (\frac{AC}{BC})^2$ d'ou $1 = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} \Rightarrow 1 = \frac{AB^2+AC^2}{BC^2}$ donc

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Enoncé du théorème de PYTHAGORE

Dans un triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des deux autres côtés.
Si ABC est un triangle rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Réciproque du théorème de PYTHAGORE

Si dans un triangle le carré d'un côté est égal à la somme des carré des deux autres côtés alors le triangle est rectangle.
Si ABC est un triangle tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors ABC est un triangle rectangle en A.

8.7.2 Autres relations métriques

on avait $r = \frac{BH}{AB}$ et $r = \frac{AB}{BC}$ donc $\frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC}$ d'ou $AB \times AB = BH \times BC$

$$\boxed{AB^2 = BH \times BC}$$

on avait $r' = \frac{CH}{AC}$ et $r' = \frac{AC}{BC}$ donc $\frac{CH}{AC} = \frac{AC}{BC}$ d'ou $AC \times AC = CH \times BC$

$$\boxed{AC^2 = CH \times BC}$$

En appliquant le théorème de PYTHAGORE sur le triangle rectangle ABH.
On a $AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AH^2 = AB^2 - BH^2$ or $AB^2 = BH \times BC$ donc $AH^2 = BH(BC - BH)$ or $BC - BH = CH$ d'ou

$$\boxed{AH^2 = BH \times CH}$$

Soit $A1$,$A2$,$A3$ les aires respectives des triangles ABC,AHC et AHB donc $A1 = A2 + A3$ or $A1 = \frac{AB \times AC}{2}$,$A2 = \frac{AH \times CH}{2}$,$A3 = \frac{AH \times BH}{2}$
donc $\frac{AB \times AC}{2} = \frac{AH \times CH}{2} + \frac{AH \times BH}{2}$ d'ou $AB \times AC = AH \times CH + AH \times BH$
$AB \times AC = AH \times (CH + BH)$ or $CH + BH = BC$

$$\boxed{AB \times AC = AH \times BC}$$

8.8 Exercices d'Applications

Exercice 1 :B.F.E.M 2005

1) a) Construire un cercle ς de centre I et de rayon 4 cm. A et B sont deux points de ς diamétralement opposés.
Placer un point M sur ς tel que $AM = 4cm$
b) Quelle est la nature du triangle AMI ?
c) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BIM}$.
2) K est le point d'intersection de la perpendiculaire à (AB) passant par I et la droite (AM).
a) Justifier que AMB est un triangle rectangle.
b) En remarquant que $\cos\widehat{BAM} = \cos\widehat{KAI}$, calculer AK et KI.
3) Le point H est le projeté orthogonal de M sur (AB).
a) Calculer $\cos\widehat{B}$ de deux manières différentes.
b) Exprimer BH en fonction de $\cos\widehat{B}$ puis démontrer que $BH = \frac{BM^2}{AB}$
4) Placer le point E sur le segment $[AM]$ tel que $AE = 3cm$.
La paralléle à (IM) passant par E coupe le segment $[AI]$ en F.
Quelle est la nature du triangle AEF ?

Exercice 2 :B.F.E.M 2002

1) Construire un triangle ABC tel que $AB = 4cm$; $AC = 3cm$; $BC = 5cm$
2) Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
3) Dans le demi-plan de frontière (BC) ne contenant pas le point A construire le point D tel que BCD soit un triangle équilatéral .Soit I le projeté orthogonal du point D sur la droite (BC).
a) Calculer DI
b) Calculer l'aire du triangle BCD
4) Le cercle de diamètre $[BC]$ coupe le segment $[BD]$ en un point M .Démontrer que M est le milieu de $[BD]$.
5) Soit E le symétrique de I par rapport au point B et (Δ) la perpendiculaire à la droite (BC) passant par E .La droite (CM) coupe la droite (ID) en H et la droite (Δ) en F.
Démontrer que $CH = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ puis calculer CF.

Exercice 3 :B.F.E.M 1997

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 8cm$ et $AC = 4cm$
1) Calculer BC puis faire la figure .
2) Soit H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$
- On donne : $AB^2 = BH \times BC$ et $AC^2 = CH \times BC$

– Calculer BH ,CH puis AH.

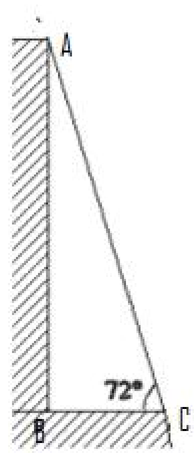
3) La parallèle à la droite (AH) passant par C coupe (AB) en E .Calculer AE puis en déduire EC.
4) Calculer $\sin \widehat{E}$.
5) Faire une figure complète.

Exercice 4 :B.F.E.M 2004

1) Tracer un demi cercle ζ de centre O et de Diamètre $[AB]$ tel que $AB = 2r$
Soit M un point du demi cercle ζ, plus proche de B que de A.
Quelle est la nature du triangle AMB ? Justifier.
2) Soit a et b les mesures en degrés respectives des angles $\widehat{BAM}$ et $\widehat{BOM}$ et C le pied de la hauteur du triangle AMB issue de M.
a) Donner deux expressions différentes de $\cos a$
b) En déduire que :$AC = AM \times \cos a$ et $AM^2 = AB \times AC$
c) On sait que $AC = AO + OC$
Exprimer OC en fonction de $\cos b$
En déduire que $AC = r(1 + \cos b)$
d) Déduire des questions précedentes que $\cos^2 a = \frac{1+\cos b}{2}$

Exercice 5 : B.F.E.M 2000

Une échelle est appuyée contre un mur vertical et fait un angle de 72 avec le sol horizontal.



Le pied de l'échelle est à 1,5 m du pied du mur.
1/ Calcule la longueur de l'échelle en prenant $\cos 72 = 0,3$
2/Détermine à 10^{-1} prés, la hauteur à laquelle se trouve le point d'appui de

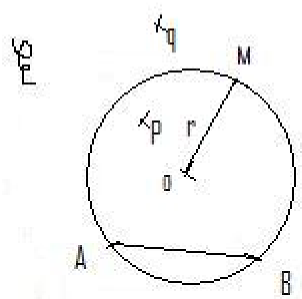
l'échelle au mur.

Chapitre 9

ANGLES INSCRITS ET ANGLES AU CENTRE

9.1 Rappels

Soit ξ un cercle de centre o et de rayon r $\xi(o;r)$ et M un point de ξ tel que $OM = r$



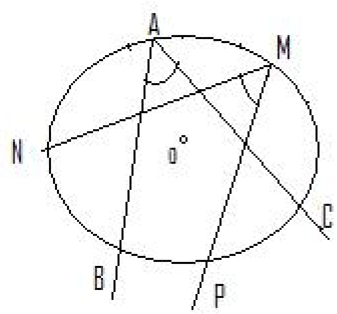
Dans la figure on a $OP \prec r$ et $Oq \succ r$ alors les points P et q n'appartiennent pas au cercle $\xi(o;r)$.
On a $OA = OB = r$ alors A et B appartiennent à $\xi(o;r)$
Les points A et B définissent un segment $[AB]$ appelé **Corde** de plus il partage le cercle en deux parties appelées **Arc de cercle**.On note :

$\widehat{AB}$ l'arc de cercle ne contenant pas M et $\underbrace{\quad}_{AB}$ l'arc de cercle contenant M.

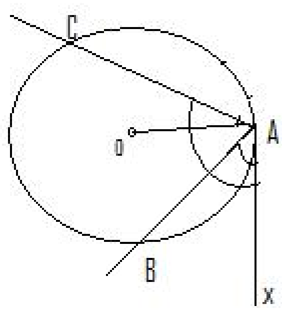
9.2 Angles inscrits

9.2.1 Définition et Exemple

Soit $\zeta(o;r)$ et A,B,C trois points de ζ



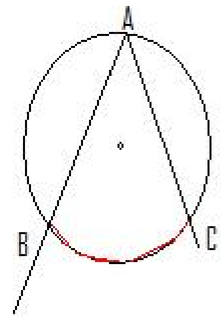
Les deux deux droites (AB) et (AC) définissent un secteur angulaire d'angle $\widehat{BAC}$ dont le sommet appartient au $\zeta(o;r)$ et les côtés recoupent le cercle ζ. Un tel angle est appelé **angle inscrit** d'un cercle.
$\widehat{BAC}$ et $\widehat{PMN}$ sont des angles inscrits dans ζ.



Les angles $\widehat{BAx}$ et $\widehat{CAx}$ sont des angles inscrits dans ζ appelées **angle inscrit limités** car ayant un côté tangent à ζ.

9.2.2 Arc Intercepté

Soit $\zeta(o;r)$ et A,B,C trois points de ζ.

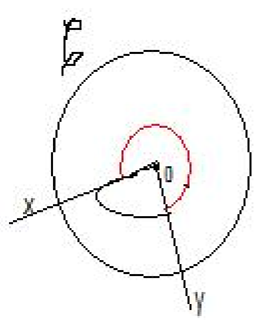


les demi droites $[AB)$ et $[AC)$ définissent un angle inscrit $\widehat{BAC}$ partageant ainsi le cercle en deux arcs de cercles.L'arc de cercle placé dans le secteurs définit par l'angle inscrit $\widehat{BAC}$ est appelé Arc intercepté.On dit $\widehat{BAC}$ intercepte l'arc $\overbrace{BC}$.
On appelle **arc intercepté** l'arc de cercle se trouvant dans le secteurs angulaire définie par l'angle inscrit et ayant pour extrémité les points d'intersection de l'angle et du cercle.

9.3 Angle au Centre

9.3.1 Définition

Soit $\varsigma(o;r)$ et $[ox)$ et $[oy)$ deux démi droites .



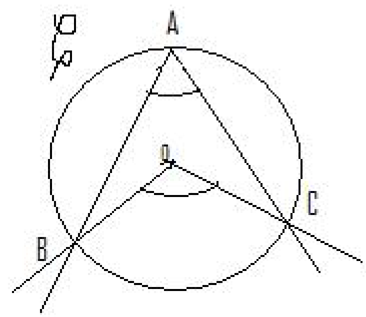
Les démi droites $[ox)$ et $[oy)$ définisent un secteur angulaire d'angle $\widehat{xoy}$ dont le sommet est le centre du cercle ς.

Un tel angle est appelé angle au centre de ς.On appelle **angle au centre** d'un cercle un angle dont le sommet est le centre du cercle.
Exemple
Les angles $\widehat{xoy}$ et $\widehat{xoy}$ sont des angles au centre.

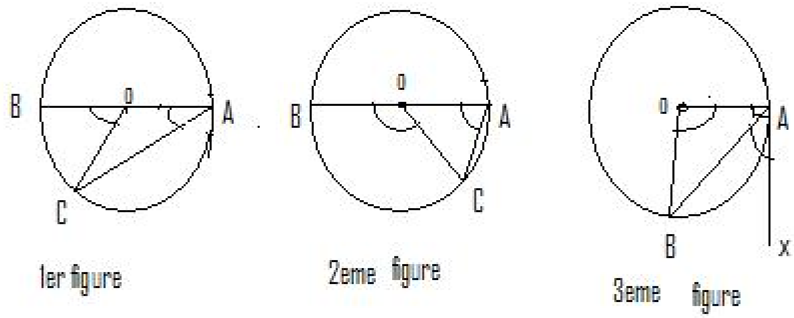
9.4 Angle inscrit et Angle au centre correspondants

9.4.1 Définition

Soit $\varsigma(o;r)$ et A,B,C trois points de ς



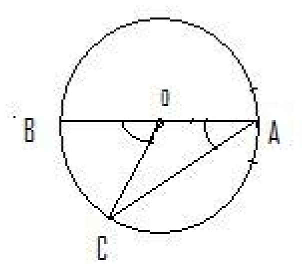
L'angle inscrit $\widehat{BAC}$ et l'angle au centre $\widehat{BOC}$ intercepte le même arc de cercle $\overset{\frown}{BC}$.Ils sont dits alors **Angle inscrit et angle au centre correspondants ou associés**.
On appelle alors **un angle inscrit et angle au centre correspondants ou associé** un angle inscrit et un angle au centre interceptant le même arc de cercle.
Exemple



L'angle inscrit $\widehat{BAC}$ et l'angle au centre $\widehat{BOA}$ dans les figures 1 et 2 sont des angles inscrits et angle au centre correspondants car interceptants le même arc $\overbrace{BC}$.
Dans la figure 3 l'angle inscrit $\widehat{BAx}$ et l'angle au centre $\widehat{BOA}$ sont dits correspondants car interceptant le méme arc $\overbrace{BA}$.

9.5 Relation entre Angle inscrit et Angle au centre correspondants

9.5.1 Cas ou un coté de l'angle est diamétre

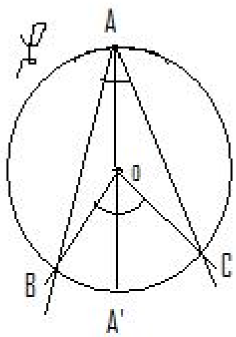


on a $OA = OC = r$ alors OAC est un triangle isocèle de sommet principale O.or dans un triangle isocèle les angle de base sont egaux.Donc $\widehat{OCA} = \widehat{OAC}$.
De plus $\widehat{OAC} + \widehat{OCA} + \widehat{AOC} = 180$ car OAC est un triangle.
D'autre part $\widehat{BOC} + \widehat{AOC} = \widehat{AOB} = 180$ car l'angle $\widehat{AOB}$ est un angle plat.

donc $\widehat{OAC} + \widehat{OCA} + \widehat{AOC} = \widehat{BOC} + \widehat{AOC}$
$\widehat{OAC} + \widehat{OAC} = \widehat{BOC} + \widehat{AOC} - \widehat{AOC}$
$2\widehat{OAC} = \widehat{BOC}$ or $\widehat{OAC} = \widehat{BAC}$ donc :

$$2\widehat{BAC} = \widehat{BOC}$$

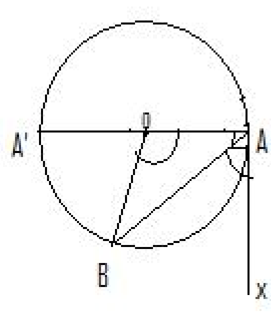
9.5.2 Cas ou le point O est au secteur angulaire $\widehat{xoy}$



Soit A' le symetrique de A par rapport à O alors l'angle inscrit $\widehat{BAA'}$ et l'angle au centre $\widehat{BOA'}$ sont correspondants donc par anologie au 1er cas $2\widehat{BAA'} = \widehat{BOA'}$.
De meme $2\widehat{CAA'} = \widehat{COA'}$ donc $2\widehat{BAA'}+2\widehat{CAA'} = \widehat{BOA'}+\widehat{COA'}$ or $\widehat{BAA'}+\widehat{CAA'} = \widehat{BAC}$ et $\widehat{BOA'} + \widehat{COA'} = \widehat{BOC}$ d'ou

$$2\widehat{BAC} = \widehat{BOC}$$

9.5.3 cas ou l'angle inscrit est un angle inscrit limité



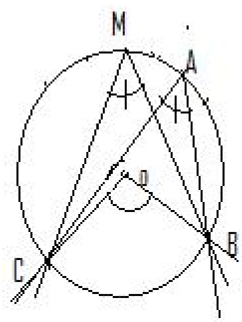
Soit A' le symetrique de A par rapport à O.donc $2\widehat{A'AB} = \widehat{A'OB}$ de plus $\widehat{A'OB} = 180 - \widehat{AOB}$ et $\widehat{A'AB} = 90 - \widehat{BAx}$ donc $2(90 - \widehat{BAx}) = 180 - \widehat{AOB}$ $180 - 2\widehat{BAx} = 180 - \widehat{AOB}$ d'ou

$$2\widehat{BAx} = \widehat{AOB}$$

Théorème relatif à l'angle inscrit et l'angle au centre correspondants
Si un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc alors la mesure de l'angle inscrit est à la **moité** de l'angle au centre ou l'angle au centre est le **double** de l'angle inscrit.

9.6 Application

9.6.1 Angle inscrit interceptant le même arc



On a l'angle au centre $\widehat{BOC}$ est un angle au centre correspondant aux deux angles inscrits $\widehat{CMB}$ et $\widehat{CAM}$ donc $2\widehat{CMB} = \widehat{BOC}$ et $2\widehat{CAM} = \widehat{BOC}$ d'ou $2\widehat{CAM} = 2\widehat{CMB}$ donc :

$$\widehat{CAM} = \widehat{CMB}$$

Théoréme relatif aux angles inscrits interceptant le même arc
Si deux angles inscrits interceptent le même arc sur un cercle alors ils ont le même mesure.

9.7 Exercices d'application

Chapitre 10

GEOMETRIE DANS L'ESPACE

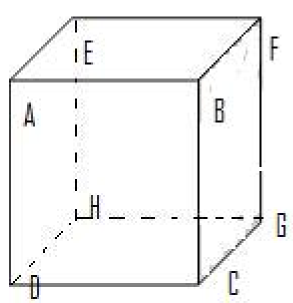
10.1 Rappels :quelques notions de base

10.1.1 Perspective cavalière

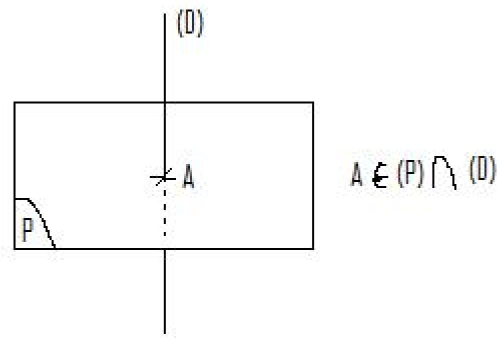
✍ Le parallélisme est conservé :deux droites paralléles dans l'espace sont représentées par deux droites parallèles dans le plan.
✍ Les parties non visibles de la figure sont tracées en pointillés.
✍ Certains propriétés du plan ne sont pas vérifiées dans l'espace.
✍ Il n'y a pas conservation de la mesure des angles si l'un des côtés n'est pas paralléle au plan de front.

Exemple de représentation

Pavé Cube



Intersection droite et plan



10.1.2 Droite et plan dans l'espace

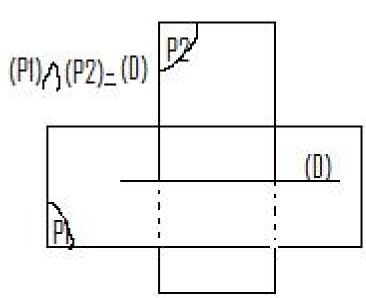
Lorsqu'une droite et un plan n'ont qu'un point commun on dit qu'ils sont sécants ou la droite perse le plan.

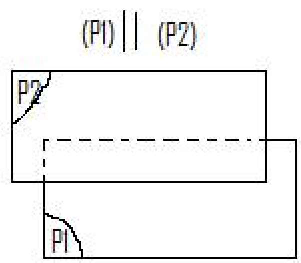
10.1.3 Le parallélisme dans l'espace

Des plans dans l'espace

Etant donné deux plans dans l'espace :

- soit ils ont paralléles
- soit ils se coupent à une droite (on dit qu'ils sont sécants).





Droites parallèles dans l'espace

Deux droites sont parallèles dans l'espace lorsque :
- elles sont dans un même plan

- elles ne se rencontrent pas

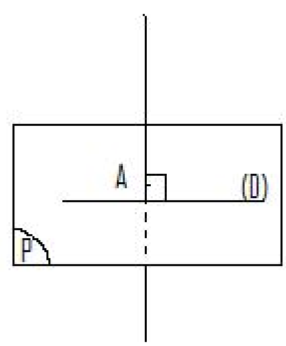
Propriétés

✍ Deux droites paralléles à une troisième droite dans l'espace alors elles sont parallèle.
✍ Si deux plans sont parallèles dans l'espace tout plan rencontrant l'une rencontre aussi l'autre et les droites d'intersections sont parallèles.
Si $(P1)\|(P2)$ et soit $(P)\cap(P1) = (D1)$ et $(P)\cap(P2) = (D2)$ alors $(D1)\|(D2)$

10.1.4 Droites et plans perpendiculaire dans l'espace

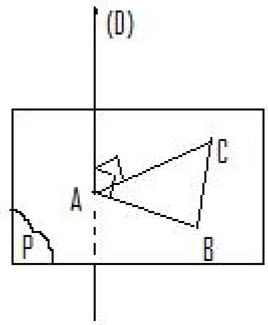
Droites perpendiculaire à un plan

La droite D perse le plan (P) en un point A lorsque'elle est perpendiculaire à tout droites de ce plan et qui passe par le point A,on dit alors que la droite est perpendiculaire au plan.



Propriété fondamentale

Dans l'espace lorsqu'une droite est perpendiculaire à deux côtés d'un triangle alors elle est perpendiculaire au plan qui contient ce triangle.



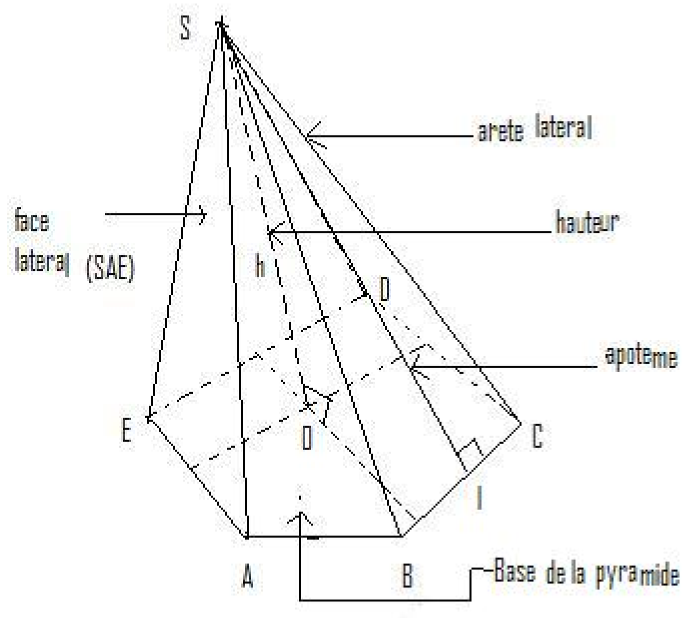
Droite perpendiculaire et plan paralléle

Si deux plans sont parallèles alors toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

10.2 Pyramide

10.2.1 Définition et description

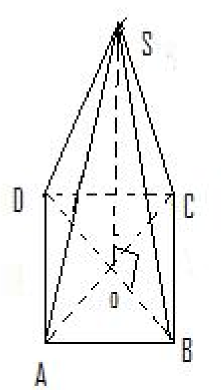
Une **pyramide** est une solide constituée d'un polygone appelé **Base** dont les sommets sont reliés à un point appartenant au plan de base appelé **sommet de la pyramide**.
La figure ci-dessous est une pyramide qui a pour **base un pentagone** $(ABCDE)$.
Un pentagone est un polygone qui a cinq côté.
Le triangle (SAE) est une **face latérale**
(SE) est une **aréte latérale**
(SO) représente la **hauteur**.
(SI) est appelé **Apotème ou Génératrice**



Exemple Tétraèdre
un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

10.2.2 Pyramide réguliere

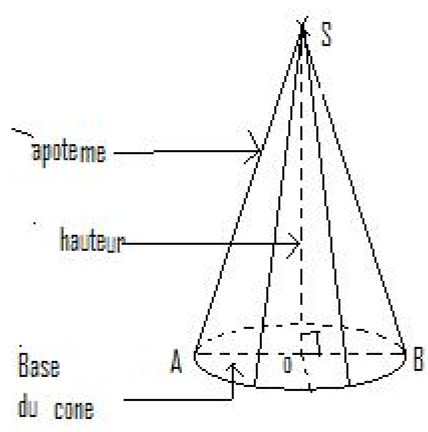
On dit qu'une pyramide est réguliere lorsque :
la base est une polygone régulier
la hauteur issue du sommet passe par le centre du polygone régulier.
Exemple



10.3 Cône de révolution

10.3.1 Définition et perspective

On appelle **cône** l'ensemble des droites passant un même points (le sommet),recontrant une courbe (ς) appelé **directrice du cône**.
On appelle **cone de révolution** un cône dont la directrice est un cercle et le sommet appartient à l'aire du cercle.



10.4 Volume de la pyramide et du cône de révolution

Soit B l'aire de la base dela pyramide ou du cône de révolution et h la hauteur de la pyramide ou du cône de révolution .le volume d'une pyramide et d'un cône de révolution est donné par la formule suivante.

$$V = \frac{aire\ de\ la\ base \times hauteur}{3}$$
$$V = \frac{B \times h}{3}$$

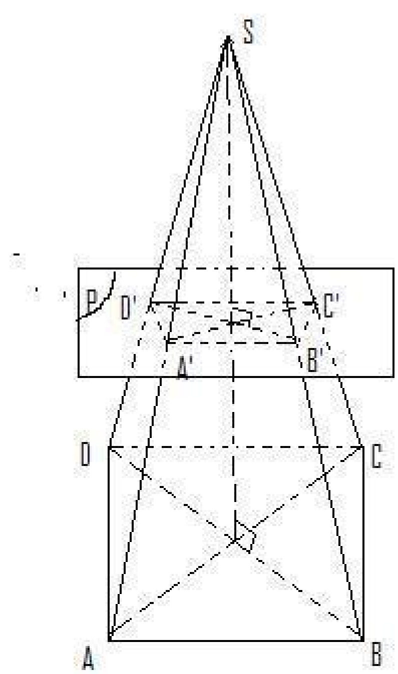
remarque :Dans le cas d'un cône de révolution : On a $B = \Pi r^2$ d'ou

$$Vc = \frac{\Pi r^2 \times h}{3}$$

10.5 Section d'une pyramide et d'un cône de révolution par un plan paralléle au plan de base

10.5.1 Section d'une pyramide :Cas d'une pyramide régulière à base Carré

Soit $(SABCD)$ une pyramide régulière de base carré $(ABCD)$ et (P) un plan parallèle au plan de base $(ABCD)$.



On a le plan $(P) \| (ABCD)$,$(SAB) \cap (ABCD) = (AB)$ et $(SAB) \cap (P) = (A'B')$

or si deux plans sont paralléles tout plan sécante à l'un est sécante à l'autre et les droites droites d'intersections sont parallèles.Ainsi $(AB)\|(A'B')$.
par conséquent les triangles $(SA'B')$ et (SAB) sont en position de THALES.
D'aprés le théorème de THALES ona

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{A'B'}{AB} = k$$

De maniére analogue

$$\frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{B'C'}{BC} = k$$

De maniére analogue

$$\frac{SC'}{SC} = \frac{SD'}{SD} = \frac{C'D'}{CD} = k$$

De maniére analogue

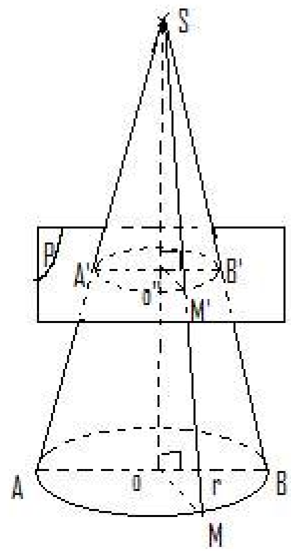
$$\frac{SD'}{SD} = \frac{SA'}{SA} = \frac{D'A'}{DA} = k$$

De maniére analogue

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SC'}{SC} = \frac{A'C'}{AC} = k$$

or on avait $AB = BC = CD = DA$ par suite $kAB = kBC = KCD = kDA$ et de plus $A'B' = kAB$,$B'C' = kBC$,$C'D' = kCD$,$D'A' = kDA$ et $A'C' = kAC$ donc on aura $A'B' = B'C' = C'D' = D'A'$ d'ou $(A'B'C'D')$ est un losange.De plus ABC est un triangle rectangle en B.or d'aprés le théorème de PYTHAGORE on a $AC^2 = AB^2 + BC^2$ par suite $k^2AC^2 = k^2AB^2 + k^2BC^2$ ainsi $(kAC)^2 = (kAB)^2 + (kBC)^2$ donc $A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2$
d'aprés la réciproque de PYTHAGORE on aura $A'B'C'$ est triangle rectangle en B'
on a $(A'B'C'D')$ est un losange ayant un angle droit donc $(A'B'C'D')$ est un carré. **Proprieté**
L'intersection d'une pyramide réguliere à base carré et d'un plan paralléle au plan de base est carré.
Remarque
Dans le cas des réduction ou agrandissement de pyramide si les distances sont multiplies par k alors les aires seront multipliés par k^2,les volumes par k^3.

10.5.2 Section d'un cône de révolution



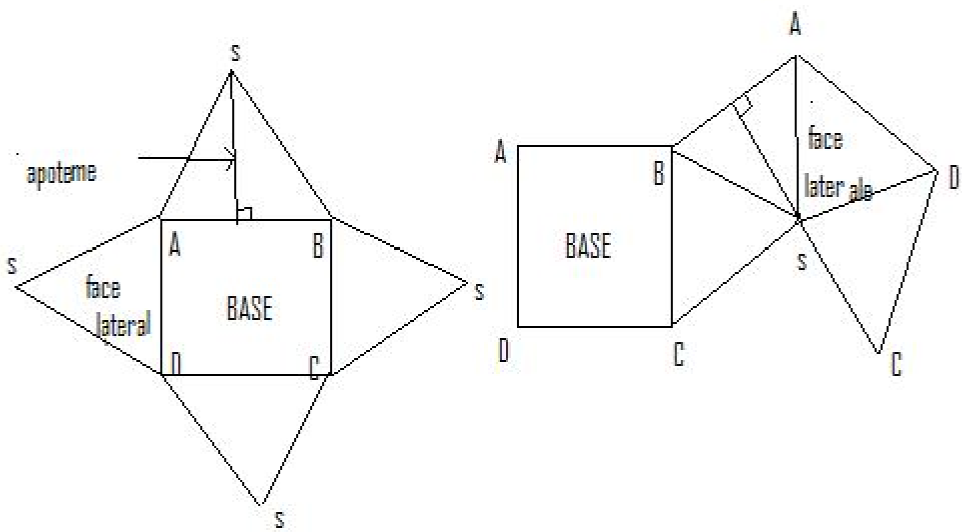
On a $\varsigma(o;r) \| (P)$; $\varsigma(o;r) \cap (SOM) = (OM)$ et $(SOM) \cap (P) = (O'M')$ or si deux plans sont parallèles tout plan sécante à l'un est sécante à l'autre et les droites d'intersections sont prallèles.
donc $(OM) \| (O'M')$.Par conséquent les segments (SO) et (SM) coupées par les parallèles OM et $O'M'$.
Ainsi les triangles (SOM) et $(SO'M')$ sont en position de THALES.
d'aprés le théorème de THALES on a :

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{SM'}{SM} = \frac{O'M'}{OM}$$

donc $O'M' = kOM$ or $OM = r$ d'ou $O'M' = r'$
Le point M décrit $\varsigma(o;r)$ donc le point M' décrit un cercle $\varsigma'(o';r')$.
Proprieté
Lintersection d'un cône de révolution par un plan paralléle à sa base est un cercle.

10.6 Patron developpement d'une pyramide et d'un cône de révolution

10.7 Patron d'une pyramide



Ainsi l'aire d'une pyramide est définie comme etant la somme de l'aire de Base et des aires latérales.

$$A_{pyr} = B + A_{laterales}$$

avec $A_{laterales}$ est la somme des aires des faces latéraux.
Dans le cas d'une pyramide régulier les faces latérales sont des triangles isocèles donc même aire.donc l'aire de ntre pyramide régulier est :

$$A_{pyr} = B + 4A_{laterale}$$

10.8 Patron d'un cône de révolution

On sait que le périmetre de la base de notre cône doit être égal à la longueur de l'arc de la face latérale.C'est à dire $\frac{2\Pi l\alpha}{360}$(l étant le génératrice,α la mesure de l'angle au centre de l'arc) en faisant l'égalité on $2\Pi r = 2\Pi l\frac{\alpha}{360}$

$$r = l\frac{\alpha}{360}$$

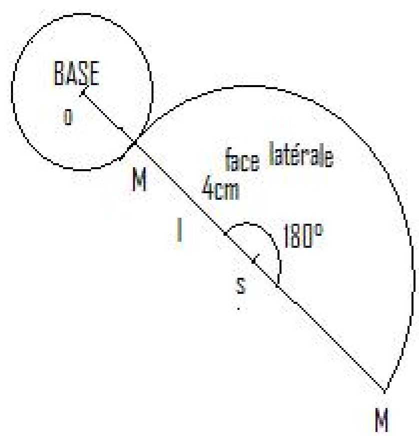
ou

$$l = \frac{r \times 360}{\alpha}$$

ou

$$\alpha = r\frac{360}{l}$$

Exemple d'un patron de cône de révolution dont le rayon de base $r = 2cm$ **et la génératrice** $l = 4cm$



l'aire d'un cône de révolution est définie alors comme étant la somme de l'aire latérale et l'aire de base.

$$A_{cone} = B + A_l$$

or la face latérale étant un arc de cercle son aire est définie par la situation de proportionalité suivante :

$$360 \longrightarrow \Pi l^2$$
$$\alpha \longrightarrow A_l$$

Ainsi $A_l = \Pi l^2 \times \frac{\alpha}{360}$ or $\alpha = r\frac{360}{l}$ donc $A_l = \Pi l^2 \times \frac{r\frac{360}{l}}{360}$ donc

$$A_l = \Pi lr$$

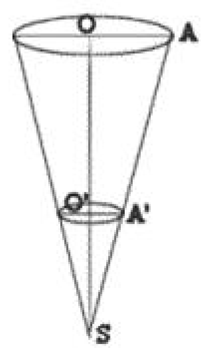
or $B = \Pi r^2$ donc

$$A_{cone} = \Pi r^2 + \Pi lr$$

10.9 Exercices d'Applications

Exercice 1 :B.F.E.M 2000

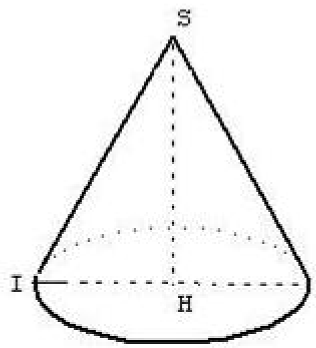
On se propose de calculer le volume d'un seau qui a la forme d'un tronc de cône de révolution.
On donne $OS = 2\sqrt{13}$ et $OA = 2a$
a étant un nombre réel positif, et O' milieu de $[OS]$.



1) Calcule $O'A'$ en fonction de a
2) On prend $a = \sqrt{3}$ pour la suite et pour unité le décimètre.
a) Calcule le volume du cône initial.
b) Calcule le volume du cône réduit et en déduire celui du seau.
3) On donne $\pi = 3,14$ et $\sqrt{13} = 3,6$
Préciser à près 10^{-2}, la valeur du volume du seau.

Exercice 2 :B.F.E.M 2005

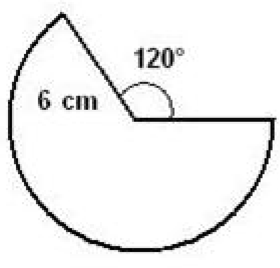
Le chapeau d'un berger a la forme d'un cône de révolution de sommet S (voir figure ci dessous) :$IH = 10\ cm$, $SH = 10\ cm$
H est le centre du disque de base.



1) Calculer le volume de ce cône.
2) Le berger recouvre son chapeau extérieurement d'un papier de décoration vendu par feuille carrée de 10 cm de coté et à 1000 F la feuille. Calculer la dépense minimale.

Exercice 3 :B.F.E.M 2004

La figure ci-dessous représente le patron de la partie latérale d'un cône de révolution.



1) Montrer que le rayon de sa base est 4 cm et que sa hauteur h mesure :$h = 2\sqrt{5}cm$
2) Calculer son volume.

Exercice 4 :B.F.E.M 2003

Un entrepreneur des travaux publics doit aménager le long des allées d'une avenue des bancs en béton. Il hésite entre deux modèles :
le modèle 1 a la forme d'un tronc de cône de révolution dont les bases paralléles ont respectivement 20 cm et 10 cm de rayons.

le modèle 2 a la forme d'un tronc de pyramide dont les bases paralléles sont des carrés de cotés respectifs 40 cm et 20 cm.
Les deux modèles ont une hauteur de 50 cm.
1) Représenter chaque modèle.
2) Sachant que le modèle le moins volumineux est le plus économique pour l'entrepreneur, aidez-le à faire le bon choix.

Exercice 5 :B.F.E.M 2006

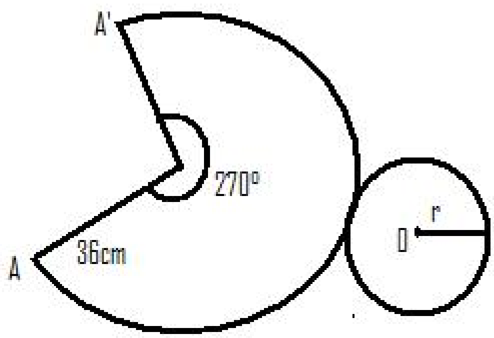
L'unité de longueur est le cm. $ABCE$ est un losange tel que : $CE = 12$ et $AB = 6$.
1) Représente $ACBE$ en dimensions réelles.
2) S est un point n'appartenant pas au plan contenant ce losange tel que : $SABC$ soit un tétraèdre de hauteur $[SB]$ avec $SB = 8$.
a) Calcul SA et SC (on remarquera que $(SB) \perp (BA)$ et $(SB) \perp (BC)$)
b) Montre que l'aire de ABC est égale 18 cm^2
c) Calcule le volume du tétraèdre $SABC$.

Exercice 6 :B.F.E.M 2009

$SABCD$ est une pyramide régulière dont la base est un carré de 240 cm de coté.
1. On coupe cette pyramide par un plan parallèle à sa base. Le tronc de pyramide obtenu (la partie différente de la réduction) est un récipient de 30 cm de profondeur et dont l'ouverture est un carré de 80 cm de coté.
a. Montre que la hauteur de la pyramide initiale SABCD est de 45 cm et que celle de la pyramide réduite est 15 cm.
b. Calcule le volume de ce récipient.
2. Les faces latérales de ce récipient sont des trapèzes de mêmes dimensions.
a. Montre que la hauteur de ces trapèzes est $10\sqrt{73}\ cm$.
b. calcule l'aire latérale de ce récipient.

Exercice 7 :B.F.E.M 2010

Le schéma ci-contre représente le patron d'un cône de révolution de sommet S, de rayon de base r. La génératrice $[SA]$ a pour longueur36 cm.



1. Justifie que la circonférence de sa base mesure $54\pi\ cm$.
2. Montre que son rayon de base r vaut 27 cm.
3. Justifie que la hauteur de ce cône est égale à $9\sqrt{7}\ cm$.
4. Calcule l'aire de la surface totale de ce cône.

On prendra $\pi = 3,14$

Chapitre 11

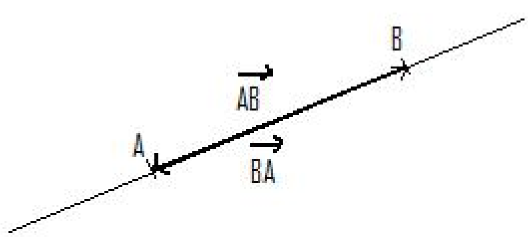
LES VECTEURS

11.1 Rappels définition

Un vecteur est un segment orienté.Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

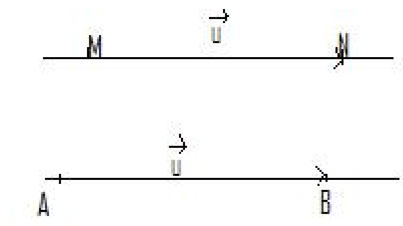
- ✍ sa direction c'est la droite (AB)
- ✍ son sens de A vers B.
- ✍ par sa longueur :la longueur du segment $[AB]$ appelée aussi norme.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont la même direction et la même longueur mais sont de sens opposés :ils sont dits des **vecteurs opposés**.



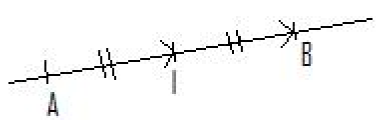
On a $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
Deux points M et N étant donné et A un point quelconque on construit le point B telque $(MN)\|(AB)$,$[AB)$ et $[MN)$ de même sens telque $MN =$

AB.On appelera le point B image du point A par la translation qui transforme le point M en N ou **translation** de vecteur $\overrightarrow{MN}$.
On note $t_{\overrightarrow{MN}}(A) = B$. c'est à dire $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$
Si $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$ alors $t_{\vec{u}}(A) = B$ c'est à dire $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.



$$\vec{u} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$$

Remarque
Si $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$ alors $ABNM$ est un parallélogramme.
Soit $[AB]$ un segment,I son milieu alors $(AI)\|(IB)$ ou confondus $[AI)$ et $[IB)$ de même sens $AI = IB$.
par conséquent $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
-Si trois points A,B,I sont telsque $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ alors I est le milieu $[AB]$.



$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$$

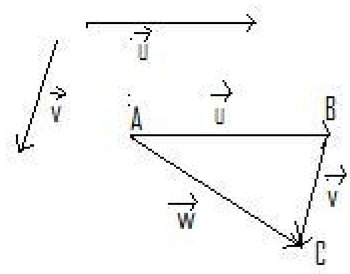
11.2 Addition vectorielle

11.2.1 Théorème et définition

Soient A un point quelconque du plan et $\vec{u}$;$\vec{v}$ deux vecteurs de ce plan. Posons $t_{\vec{u}}(A) = B$ et $t_{\vec{v}}(B) = C$ c'est à dire $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.
L e vecteurs $\overrightarrow{AC} = \vec{w}$ associé à la composé des translations $t_{\vec{v}}$ et $t_{\vec{v}}$ est le vecteur somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on écrit :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Et comme $\overrightarrow{AC} = \vec{w}$ et $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ on a $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$



$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} \text{ ou} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Le $\vec{w}$ est indépendant de la position du point A choisi mais dépend uniquement de la position des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

11.2.2 Relation de CHASLES

Soit trois points A,B et C du plan on a :

$$\boxed{\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}$$

11.2.3 Propriété

La somme de deux vecteurs du plan est un vecteur plan.

Commutativité

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan on a :

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

Associativité

Soit $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan on a :

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

Element neutre

Il existe un vecteur noté $\vec{0}$ telque quelque soit un vecteur $\vec{u}$ du plan on aura

$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$$

Le vecteur $\vec{0}$ est **un vecteur nul** élement neutre de l'addition vectorielle.
Remarque
Soit A et B deux points du plan on a $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$
$\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ si et seulement si $A=B$

Vecteurs opposés

Quelques soit un vecteur $\vec{u}$ il existe toujours un vecteurs $\vec{u'}$ telque :
$\vec{u}+\vec{u'}=\vec{u'}+\vec{u}=\vec{0}$;$\vec{u'}$ est appelé **vecteur opposé** de $\vec{u}$ donc $\vec{u}=-\vec{u'}$

11.3 Produit d'un vecteur par un réel

11.3.1 Definition et Exemple

Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan telle qu'il existe un réel k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$ alors $\vec{v}$ est appelé le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k.

11.3.2 propriété

Soient a et b deux réels et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan on a :

$$(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$$
$$a(b.\vec{u})=(a.b)\vec{u}$$
$$a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$$

-Le produit d'un vecteur $\vec{u}$ par un réel k est égal à $\vec{0}$ si et seulement si $k=0$ ou le vecteur $\vec{u}$ est égal à $\vec{0}$:

$$k\vec{u}=\vec{0}\ ssi\ k=0\ ou\ \vec{u}=\vec{0}$$

11.3.3 Condition de Colinéarité ou même direction

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaire** s'il existe un réel k telque $\vec{v} = k\vec{u}$ **Remarque**
-Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan on a $\vec{0} = 0\vec{u}$ ainsi ainsi le vecteur $\vec{0}$ est colineaire à tout vecteur du plan.
-Deux vecteurs colineaire ont la même direction
-A,B et C sont alignés si et seulement si il exite un réel k telque $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

11.4 Distance et norme d'un vecteur

11.4.1 distance de deux point du plan

Définition

A,B etant deux points du plan on appelle distance du point A au point B la mesure de la longueur du segment $[AB]$.On note $AB = mesure\ [AB]$

Propriétés

Quelques soient A,B,C et I On a :

$$AB = BA$$
$$AB = 0 \text{ si et seulement si } A = B$$
$$AC \leq AB + BC \text{ (c'est l'inégalité triangulaire)}$$
$$AI = IB \text{ avec } I \in [AB]\ I \text{ milieu de } [AB]$$

11.4.2 Norme d'un vecteur

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur de représentant (A, B) ie $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ On appelle norme du vecteur $\vec{u}$ noté $\|\vec{u}\|$,la distance du point A au point B.
On note $\|\vec{u}\| = AB$

propriétés

$$\|\vec{u}\| = \|-\vec{u}\|$$
$$\|\vec{u}\| = 0 \text{ si et seulement si } \vec{u} = \vec{O}$$

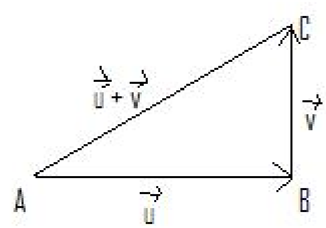
$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$
Si k est un réel alors $\|k\vec{u}\| = |k|\,\|\vec{u}\|$

11.5 Vecteurs Orthogonaux

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconque du plan,on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux si leurs directions sont perpendiculaires.On note $\vec{u}\perp\vec{v}$.

11.5.1 Propriétés

soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ deux vecteurs orthogonaux.



On a ABC est un triangle rectangle en B
D'aprés le théoréme de PYTHAGORE on a $AC^2 = BA^2 + BC^2$
et comme $AC = \|\vec{u}+\vec{v}\|$,$AB = \|\vec{u}\|$ et $BC = \|\vec{v}\|$
donc $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$
Si $\vec{u}\perp\vec{v}$ alors
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

11.6 Exercices d'Applications

Exercice 1 :B.F.E.M 2003
On considère un triangle ABC tel que $AB = 5cm$; $AC = 6cm$ et $BC = 7cm$
Soit I le milieu de $[BC]$
1) Construire G, le centre de gravité du triangle ABC
2) Sachant que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$; démontrer que : pour tout point M du

plan, on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

Exercice 2 :B.F.E.M 2010

ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB + AC + BC = 72\ cm$ et $4AB = 3AC$.

1. Sans calculer les longueurs des cotés du triangle ABC, montre que :

a. $7AB + 3BC = 216\ cm$;

b. $3BC - 5AB = 0$.

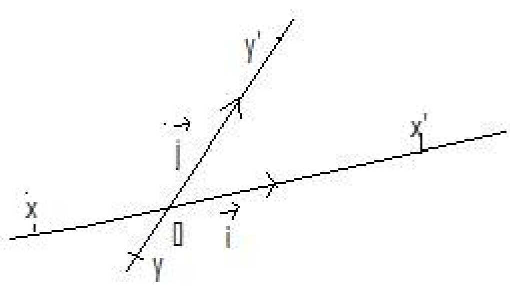
2. En utilisant les résultats de la question 1., calcule AB et BC ; déduis-en AC.

Chapitre 12

REPERAGE DANS LE PLAN

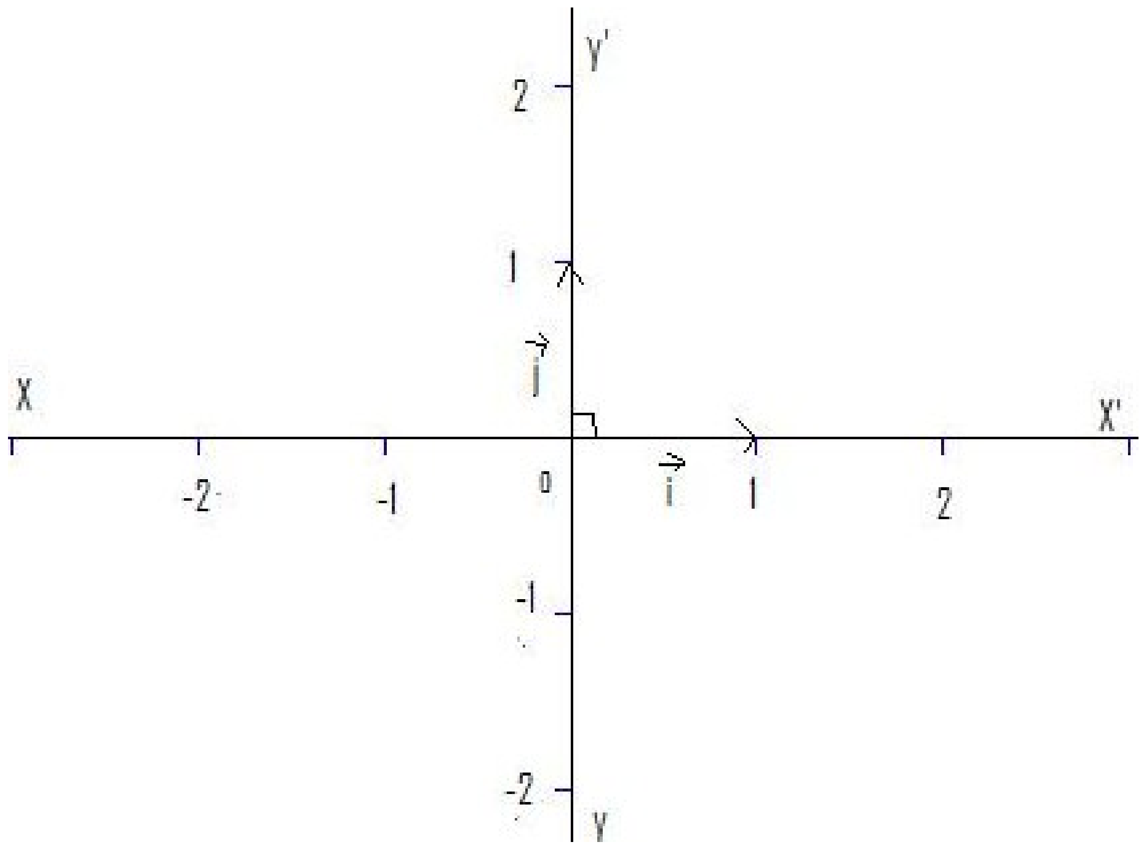
12.1 Repère orthogonal

On appelle repère cartésien tout triplé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est un point du plan et le couple $(\vec{i}; \vec{j})$ une **base** du plan.
on appelle base d'un plan tout couple de vecteur de direction differente.



Repère cartésien

Le point O est appelé **origine du repère** $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
les axes (xx') et (yy') sont appelés respectivement **axes des abscisses** et **axes des ordonnées**.
Si les axes (xx') et (yy') sont perpendiculaires et que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont la même norme(longueur),le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est dit alors **repère orthonormal**.
Exemple :le repère ci-dessous est un repère orthonormal.

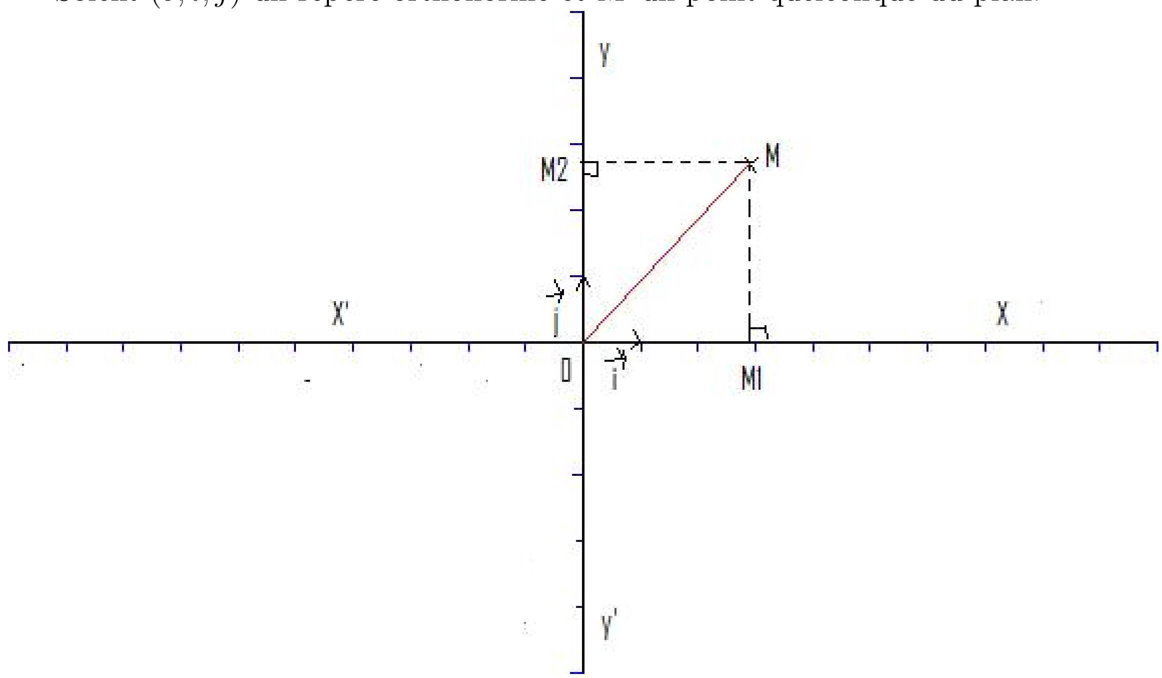


Repère orthonormé

On appelle **repère orthonormé** tous repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ tels que $\vec{i} \perp \vec{j}$
et $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1$
.Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont dits **normé** ou **unitaire**.

12.2 Coordonnées d'un point dans un repère orthonormé

Soient $(o,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé et M un point quelconque du plan.



Soient M_1 et M_2 les projetés orthogonaux de M respectivement sur les axes (XX') et (yy').
On a d'aprés la relation de CHALES $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M}$.or OM_1MM_2 est un parallelogramme donc $\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{OM_2}$ d'ou $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$ et comme $\overrightarrow{OM_1}$ et $\vec{i}$ colineaire d'une part et $\overrightarrow{OM_2}$ et $\vec{j}$ colineaire d'autre part.alors il exite deux réels x et y telque $\overrightarrow{OM_1}=x\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM_1}=y\vec{j}$
donc

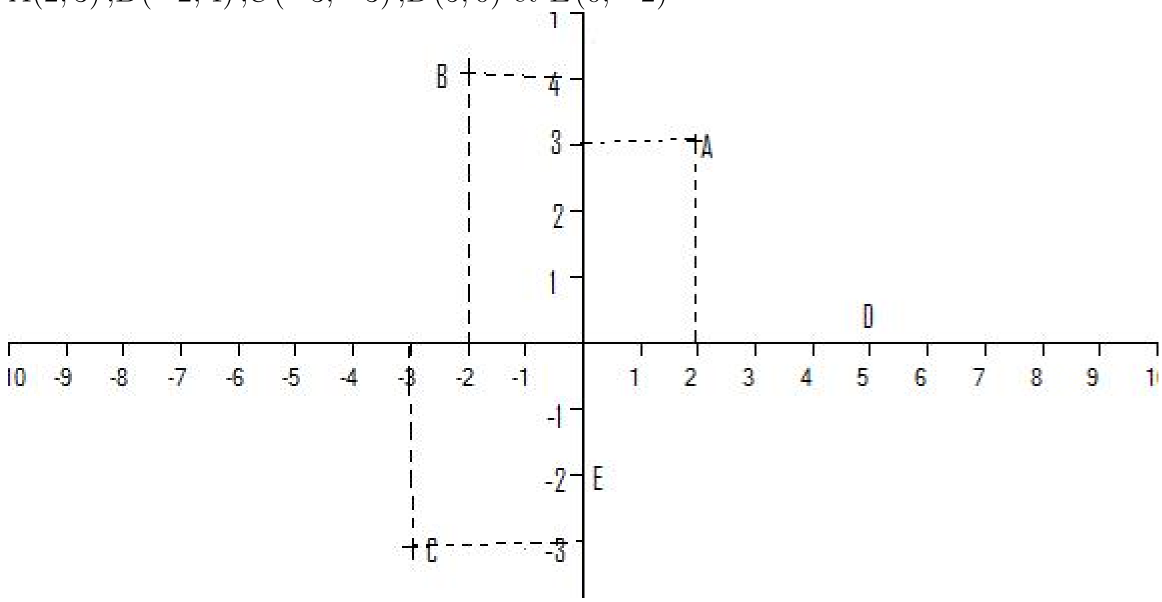
$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

alors le couple $(x;y)$ est appelé **les coordonnés du point** M dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$.On notera $M(x;y)$ ou $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.Le réel x est appelé **abscisse** du point M et y son **ordonné**.

Application

Tracer les points A,B,C et D dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ telsque : $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+3\vec{j}$; $\overrightarrow{OC}=-3\vec{i}-3\vec{j}$ $\overrightarrow{OB}=-2\vec{i}+4\vec{j}$;$\overrightarrow{OD}=5\vec{i}$;$\overrightarrow{OE}=-2\vec{j}$ d'ou

$A(2;3)$;$B(-2;4)$;$C(-3;-3)$;$D(5;0)$ et $E(0;-2)$



12.2.1 Coordonnées du vecteur nul

soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base du plan et comme le vecteur nul est colineaire à tout vecteur du plan on aura $\vec{o}=0\vec{i}$ et $\vec{o}=0\vec{j}$ ainsi $\vec{0}=0\vec{i}+0\vec{j}$ d'ou le vecteur nul

$$\vec{o}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

12.2.2 Coordonnées d'un vecteur somme

Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.
On se propose de chercher les coordonnées de la somme $\vec{u}+\vec{v}$.
On a $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$
alors $\vec{u}+\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}+x'\vec{i}+y'\vec{j}$
donc $\vec{u}+\vec{v}=x\vec{i}+x'\vec{i}+y\vec{j}+y'\vec{j}=(x+x')\vec{i}+(y+y')\vec{j}$ d'ou $\vec{u}+\vec{v}(x+x';y+y')$
Si $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ alors

$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$$

12.2.3 Coordonnées du produit d'un vecteur avec un réel

Soit $\vec{u}(x;y)$ dans un repère $(o,\vec{i},\vec{j})$.
On se propose de chercher les coordonnées du vecteur $\vec{w}=k\vec{u}$ On a $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ alors $\vec{w}=k(x\vec{i}+y\vec{j})=kx\vec{i}+ky\vec{j}$ d'ou $\vec{w}(kx;ky)$
Si $\vec{u}(x;y)$ alors

$$k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

12.2.4 Vecteur égaux et vecteur opposés

Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.
On se propose de chercher la condition nécessaire et suffisant pour que les deux vecteurs $\vec{u}$et $\vec{v}$ soient égaux.
On a $\vec{u}=\vec{v}$ alors $x\vec{i}+y\vec{j}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$
donc $(x\vec{i}+y\vec{j})-(x'\vec{i}+y'\vec{j})=0$ donc $(x-x')\vec{i}+(y-y')\vec{j}=0$ de plus on sait que $\vec{i}\neq 0$ et $\vec{j}\neq 0$ donc $x-x'=0$ et $y-y'=0$ d'ou $x=x'$ et $y=y'$
Si $\vec{u}=\vec{v}$ alors

$$\begin{cases} x=x' \\ y=y' \end{cases}$$

Deux vecteurs sont égaux si leur coordonnées sont égaux.
si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont opposés ssi $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$ d'ou $\vec{v}=-\vec{u}$ donc $x'=-x$ et $y'=-y$
Si $\vec{u} et \vec{v}$ sont opposés alors

$$\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases}$$

12.2.5 Condition de colinéarité de deux vecteurs

Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.
si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colineaires alors il exite un réel k telque $\vec{v}=k\vec{u}$ c'est à dire $x'=kx$ et $y'=ky$

Calculons $xy'-x'y$?

$xy'-x'y=x(ky)-(kx)y=kxy-kxy$ d'ou $xy'-x'y=0$
$\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont colinéaires si et seulement si

$$xy'-x'y=0$$

12.3 coordonnées d'un vecteur représenté par un bipoint

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B.y_B)$ dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.
On se propose de chercher les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.
D'aprés la relation de CHALES on a :$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$ alors $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$
$\overrightarrow{AB}=-(x_A\vec{i}+y_A\vec{j})+(x_B\vec{i}+y_B\vec{j})$
$\overrightarrow{AB}=x_B\vec{i}-x_A\vec{i}+y_B\vec{j}-y_A\vec{j}$
$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}$
d'ou $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$
Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B.y_B)$ alors

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$$

Exemple :Dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ on donne $A(2;3)$ et $B(6;-4)$ calculer les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AB}$.
on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6-3 \\ -4-3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$

12.3.1 Coordonnée du milieu de deux points

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points et $I(x_I;y_I)$ milieu du segment $[AB]$ dans un repére orthonormal $(o,\vec{i},\vec{j})$
on se propose chercher les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.
D'aprés la relation CHALES on a $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}$ or I milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ d'ou $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AI}$ donc $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$ or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} x_I-x_A \\ y_I-y_A \end{pmatrix}$ donc $2\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} 2x_I-2x_A \\ 2y_I-2y_A \end{pmatrix}$ puisque $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$
$\begin{cases} x_B-x_A=2x_I-2x_A \\ y_B-y_A=2y_I-2y_A \end{cases}$ $\begin{cases} x_B-x_A+2x_A=2x_I \\ y_B-y_A+2y_A=2y_I \end{cases}$
donc $\begin{cases} x_I=\frac{x_A+x_B}{2} \\ y_I=\frac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$ donc $I\begin{pmatrix} \frac{x_A+x_B}{2} \\ \frac{y_A+y_B}{2} \end{pmatrix}$

Si I est le milieu $[AB]$ telque $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ alors

$$I\begin{pmatrix} \frac{x_A+x_B}{2} \\ \frac{y_A+y_B}{2} \end{pmatrix}$$

Exemple :soit $A(2;3)$ et $B(4;5)$.Calculer les coordonnées de I milieu de $[AB]$.
on a $I(\frac{2+4}{2};\frac{3+5}{2})$ donc $I(3;4)$

12.4 Norme d'un vecteur et distance de deux points dans un repère orthonormé

Soit $\vec{u}(x;y)$ dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ ie $\vec{i}\perp\vec{j}$
et $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1$
On a $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ or $\vec{i}\perp\vec{j}$ par conséquent $\|\vec{u}\|^2 = \left\|x\vec{i}+y\vec{j}\right\|^2 = \left\|x\vec{i}\right\|^2 + \left\|y\vec{j}\right\|^2$
donc $\|\vec{u}\|^2 = x^2\left\|\vec{i}\right\|^2 + y^2\left\|\vec{j}\right\|^2$ or $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1$ d'ou $\left\|\vec{i}\right\|^2 = \left\|\vec{j}\right\|^2 = 1$ donc $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$ d'ou $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ Si $\vec{u}(x;y)$ alors

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Calcul de distance de deux points dans un repère orthonormé
soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$
on se propose de calculer la distance AB
On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ donc $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2}$
Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2}$$

12.5 Condition d'orthogonalité de deux vecteurs

Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$
On se demande de donner la condition nécessaire et suffisante pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

On sait que $\vec{u}\perp\vec{v}$ si et seulement si $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ (1)
or $\vec{u}(x;y)$;$\vec{v}(x';y')$;$\vec{u}+\vec{v}(x+x';y+y')$ donc $\|\vec{u}\|^2 = x^2+y^2$; $\|\vec{v}\| = x'^2+y'^2$
et $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (x+x')^2+(y+y')^2 = x^2+x'^2+2xx'+y^2+y'^2+2yy'$
faisont l'egalité
(1)$\Rightarrow x^2+x'^2+2xx'+y^2+y'^2+2yy' = x^2+y^2+x'^2+y'^2$
$x^2+x'^2+2xx'+y^2+y'^2+2yy'-x^2-y^2-x'^2-y'^2 = 0$
$2xx'+2yy' = 0$
$2(xx'+yy') = 0$ d'ou $xx'+yy' = 0$
$\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont orthogonaux si et seulement si

$$xx'+yy' = 0$$

12.6 alignement de trois points

Dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$,pour montrer que trois points sont alignés il suffit de trouver que de ces trois points on peut obtenir deux vecteurs colinéaire.
Exemple :On donne $A(5;2)$;$B(3;6)$ et $C(-1;14)$.Montrer que A,B et$C$ sont alignés.
On a :$\overrightarrow{AB}(-2;4)$; $\overrightarrow{AC}(-6;12)$ donc $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$
donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires d'ou A,B et$C$ sont alignés
autre methode :exo pour le lecteur

12.7 Exercices D'Applications

EXERCICE 1 :B.F.E.M 1997
On considére dans un repére orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ du plan , les points $A(-4;4)$;$B(-9;-6)$;$C(1;-1)$ et $D(6;9)$
1) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$, puis la nature du triangle ABC.
2) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? (Justifier votre réponse)
3) Montrer que le point $E(2;-8)$ est symétrique de A par rapport à (BC)
EXERCICE 2 :B.F.E.M 2001
Dans un plan muni d'un repére orthonormal $(o,\vec{i},\vec{j})$ on donne $A(-2;1)$;$B(4;3)$;$C(-1;y)$
1/ Calcule y pour que les vecteurs et soient orthogonaux. Dans la suite du

probléme on prendra l'ordonnée de C égale à -2.
2/ Calcule les ordonnées du point D symétrique de A par rapport au milieu I de $[BC]$
3/ Démontre que $ABDC$ est un rectangle.
4/ Montre que les points A,B,D et C sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et calculera le rayon.
5/ Soit $\vec{u}(1;7)$. Calcule les coordonnées du point E image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$
6/ Démontre que AEI est un triangle rectangle puis en déduire la position de la droite (AE) par rapport au cercle sur lequel se trouvent A,B,C,D

EXERCICE 3 :B.F.E.M 2009

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(o,\vec{i},\vec{j})$, on donne les points $A(5;0)$; $B(6;2)$; $C(2;4)$.
1. Montre que le triangle ABC est rectangle en B.
2. Construire le point D tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$, puis calcule ses coordonnées .
3. Construire le point E symétrique de C par rapport à B, puis calcule ses coordonnées.
4. Justifie que le quadrilatère $ACDE$ est un losange.
5. Soit $F(12;4)$; justifie que l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

Chapitre 13

EQUATIONS DE DROITES

13.1 Equation d'une droite

13.1.1 Définition

Dans un repére orthonormal,une droite (D) quelconque est l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant une équation du type $ax + by + c = 0$ avec a,b,c $\in \Re$.
$ax + bx + c = 0$ est **léquation générale** de la droite (D).
Ainsi on peut exprimer y en fonction de x dans cette équation c'est à dire $by = -ax - c$ ssi $y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$ posons $\alpha = \frac{-a}{b}$ et $\beta = -\frac{c}{b}$ d'ou $(D) : y = \alpha x + \beta$
$y = \alpha x + \beta$ est appelé **l'equation réduite** de la droite (D).

13.1.2 Droite définie par deux points

Soient $A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
on se propose de determiner l'equation de la droite (AB).
Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (AB)$ donc les points A,B et M sont alignés d'ou $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.
or $\overrightarrow{AB}(1; 2)$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix}$
puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires alors $2(x - 1) - 1(y - 3) = 0$

ssi $2x - 2 - y + 3 = 0$ ssi $2x - y + 1 = 0$ d'ou $(AB) : 2x - y + 1 = 0$

13.1.3 Equation définie par un vecteur et un point

soient $A(3;5)$ et $\vec{u}(-4;7)$ dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
On se propose de déterminer l'equation de la droite (D) passant par A et ayant la même direction que $\vec{u}$ alors $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D)
Soit $M(x;y) \in (D)$ et comme (D) et $\vec{u}$ ont la même direction.
donc $\overrightarrow{AM}(x-3;y-5)$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
donc $7(x-3) - [-4(y-5)] = 0$ ssi $7x - 21 + 4y - 20 = 0$ ssi $7x + 4y - 41 = 0$
donc $(D) : 7x + 4y - 41 = 0$

13.1.4 vecteur directeur

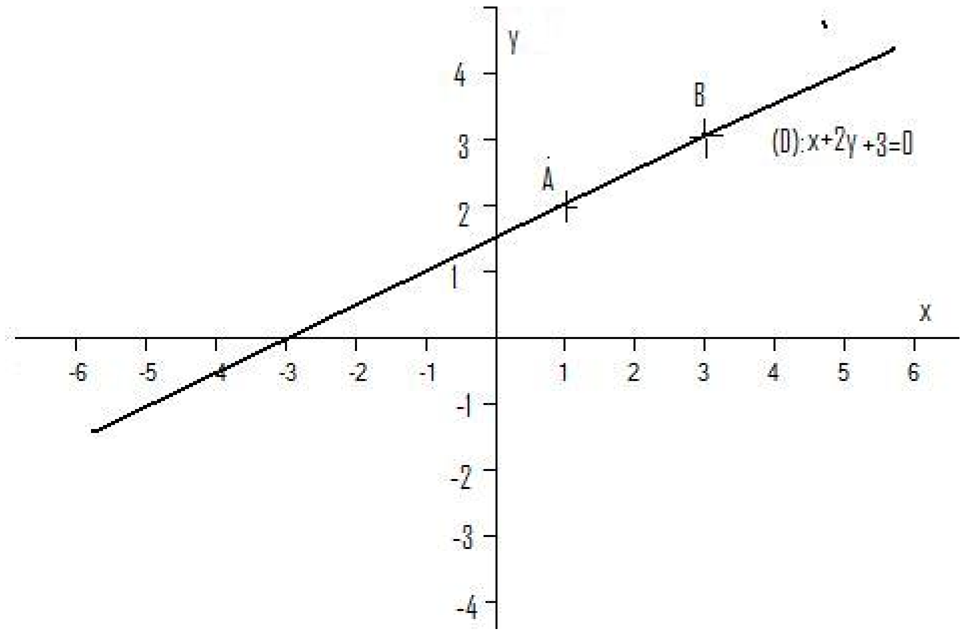
la droite d'équation $(D) : ax+by+c = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(b;-a)$.
Exemple
La droite $(AB) : 2x - y + 1 = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(-1;-2)$
$(D) : 7x + 4y - 41 = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{v}(4;-7)$
Determiner l'equation de la droite (D) passant par $A(2;1)$ et pour vecteur directeur $\vec{u}(4,-5)$
On a $(D) : ax + bx + c = 0$ et $\vec{u}(4;-5)$ est un vecteur directeur de (D). donc $b = 4$ et $a = 5$
d'ou $(D) : 5x + 4y + c = 0$ de plus $A \in (D)$ donc ces coordonnées vérifient l'equation de (D) c'est à dire $5 \times 2 + 4 \times 1 + c = 0$ d'ou $10 + 4 + c = 0$ ssi $c = -14$
donc $(D) : 5x + 4y - 14 = 0$

13.2 Représentation graphique d'une droite

Soit dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.On donne $(D) : x - 2y + 3 = 0$.
On se propose de représenter la droite (D) sur le repère.
Pour reprèsenter (D) il suffit seulement de connaitre deux points appartenant à (D).Pour cela on donne à x deux valeurs et on cherche les valeurs de y correspondants.ou vice versa.

on aura

	A	B
x	1	3
y	2	3



Remarque
Toute droite coupant l'axe des abscisses le coupe en un point d'ordonnée 0.
Toute droite coupant l'axe des ordonnées le coupe en un point d'abscisses 0.

13.2.1 Droite parallèle aux axes

Dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$,si une droite (D) est paralléle à l'axe des abscisses alors il existe un réel a telque $(D) : y = a$ et (D) passe par le point de coordonné $(0; a)$
D'autre part Si une droite (D) est parallele à l'axe des ordonnées alors il existe un réel b telque $(D) : x = b$ et (D) passe par le point de coordonné $(b; 0)$
Exemple
$(\delta) : y = 2$ est parallèle à l'axe des abscisses.
$(D) : x = -3$ est parallele à l'axe des ordonnées

13.3 Coefficient directeur

13.3.1 Définition et Exemple

Dans un repére orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$,si nous prenons l'équation réduite de la droite (D)
on a $(D) : y = \alpha x + \beta$, on appelle **coefficient directeur** de la droite (D) le réel α
β est appelé **ordonné à l'orige** de la droite (D)
cette équation a pour **vecteur directeur** $\vec{u}(1; \alpha)$ **Exemple**$(\delta) : y = 2x + 3$ a pour coefficient directeur 2.

13.3.2 Condition de parallèlisme de deux droite

Dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, soient $(D_1) : y = ax+b$ et $(D_2) : y = a'x + b'$ deux droites
On se propose de determiner la condition de parallèlisme des deux droites (D_1) et (D_2)
on sait que (D_1) a pour vecteur directeur $\vec{u}(1; a)$ et D_2 $\vec{v}(1; a')$
or $(D_1)\|(D_2)$ donc les vecteurs directeurs sont colinéaires. appliquons la condition de colinèarité aux deux vecteurs $\vec{u}(1; a)$ et $\vec{v}(1; a')$.
c'est à dire $1 \times a' - 1 \times a = 0$ ssi $a' - a = 0$ ssi $a' = a$
théoréme :
Deux droites sont paralléles si elles ont le méme coefficient directeur.
Si $(D_1) : y = ax + b$ et $(D_2) : y = a'x + b'$ alors $(D_1)\|(D_2)$ si et seulement si

$$a' = a$$

.

13.3.3 Condition pour que deux droites soient perpendiculaire

Dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, soient $(D_1) : y = ax+b$ et $(D_2) : y = a'x + b'$ deux droites
On se propose de determiner la condition pour que (D_1) et (D_2) soient perpendiculaire.
on sait que (D_1) a pour vecteur directeur $\vec{u}(1; a)$ et D_2 $\vec{v}(1; a')$

or $(D_1)\perp(D_2)$ donc les vecteurs directeurs sont orthogonaux.
appliquons la condition d'orthogonalité aux deux vecteurs $\vec{u}(1;a)$ et $\vec{v}(1;a')$.
c'est à dire $1\times 1+a'\times a=0$ ssi $a'\times a+1=0$ ssi $a'\times a=-1$
théoréme :
Deux droites sont perpendiculaires si le produit de leurs coefficient directeur est égal à -1.
Si $(D_1) : y=ax+b$ et $(D_2) : y=a'x+b'$ alors $(D_1)\perp(D_2)$ si et seulement si

$$a'\times a=-1$$

.

13.3.4 Relation entre les coordonnés du vecteurs directeurs et le coefficient directeur

Soit $(D) : ax+by+c=0$
$\vec{u}(b;-a)$ un vecteur directeur.
et comme (D) peut s'ecrire de la forme
$(D) : y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}$
donc $\alpha=\frac{-a}{b}$ est le coefficient directeur de D
d'ou le coefficient directeur est rapport de l'ordoné du vecteur directeur sur l'abscisse du vecteur directeurs.
Si $\vec{u}(\alpha;\beta)$ est un vecteur directeur alors $a'=\frac{\beta}{\alpha}$ est un coefficient directeur.

13.4 Equation réduite d'une droite

13.4.1 Equation défini par deux point de la droite

Soit $A(x_A;x_B)$ et $B(x_B;x_B)$ et soit $(D) : y=ax+b$ alors

$$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\ ou\ a=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}$$

et on détermine b en vérifiant l'un des points sur l'equation.
Exemple :determiner l'equation réduite de la droite paasant par $A(1;2)$ et $B(3;5)$
soit $(D) : y=ax+b$ on a $a=\frac{5-2}{3-1}=\frac{3}{2}$

d'ou $(D) : y = \frac{3}{2}x + b$ puisque $A \in (D)$ donc ces coordonnées vérifient l'equation. d'ou $2 = 1 \times \frac{3}{2} + b$ donc $b = \frac{1}{2}$
d'ou $(D) : y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

13.5 Exercices d'Applications

Exercice 1 : Droite D'EULER
Le plan est muni du repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
On donne les points $A(7;1)$,$B(5;-5)$ et $C(1;7)$.
Dans le triangle ABC,on désigne par H l'orthocentre,G le centre de gravité et P le centre du cercle circonscrit.
a)Démontre que H,G et P sont alignés.
b)Détermine une équation de la droite (D),dite **droite d'Euler**,qui passe par ces trois points.

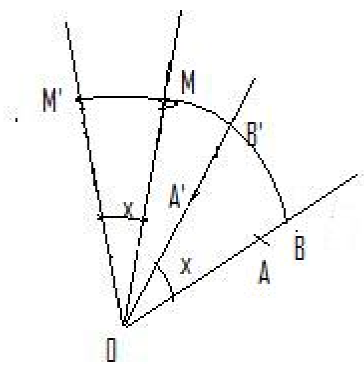
Chapitre 14

TRANSFORMATION DU PLAN

14.1 Rappel sur une transformation usuelle du plan Rotation

14.1.1 Définition

Soit O un point du plan et x la mesure d'un angle.
Un sens de parcour étant donné (sens contraire de l'aigu d'une montre) :c'est le sens direct.On appelle l'image M' du point M par la rotation de centre O et d'angle x le point telque $OM = OM'$ et $\overrightarrow{MOM'} = x$ entourant dans le sens direct.
Procédure de construction :
on donne un point O et deux points A et A' telque $OA = OA'$.Soit M un point quelconque.Pour construire le point M' image de M par la rotation de centre O qui transforme A en A'.on trace :
les démi-droites $[OA)$ et $[OA')$
un arc de cercle de centre O passant par M qui coupe $[OA)$ en B et $[OA')$ en B'
et on détermine le point M' sur l'arc par les condition suivante :
$MM' = BB'$ et $\widehat{BOB'} = \widehat{MOM'}$ en tournant dans le sens direct.



14.1.2 Propriété

La rotation conserve les distances,l'alignement,le parallèlisme,l'orthogonalité, les angles et les aires.

14.2 Isométrie

14.2.1 Définition

On appelle **isométrie** toute transformation du plan qui conserve les distances.

14.2.2 Propriété

Une isomètrie du plan conserve l'alignement,le parallélisme,l'orthogonalité, les angles et les aires.

Exemple :

-La symètrie centrale est une isomètrie du plan.

Si $S_O(A) = A'$ et $S_O(B) = B'$ alors $AB = A'B'$

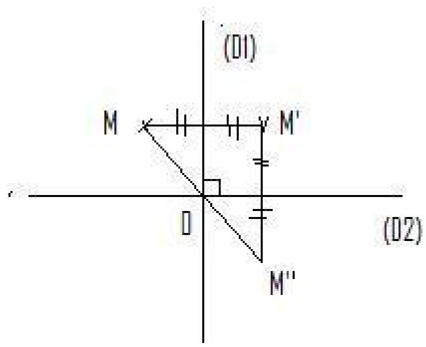
-La symétrie orthogonal est une isomètrie du plan.

Si $s_{(\Delta)}(A) = A'$ et $s_{(\Delta)}(B) = B'$ alors $AB = A'B'$

-La translation est une isomètrie du plan.

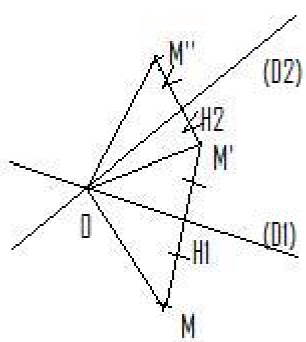
14.3 Symétries Axiales succésives

14.3.1 Les axes sont perpendiculaire



on a $M' = s_{(\Delta)}(M)$ donc (Δ) est la médiadrice de $[MM']$ et de plus $O \in (\Delta)$ donc $OM = OM'$
De maniére analogue : on a aussi $OM' = OM''$
Ainsi on peut dire que $OM = OM''$ et M,O et M'' sont alignés donc O est le milieu de $[MM'']$
d'ou $S_O(M) = M''$
propriété :Une succession de symétrie orthogonale(ou axiale) d'axes perpendiculaires est une **symétrie centrale**.

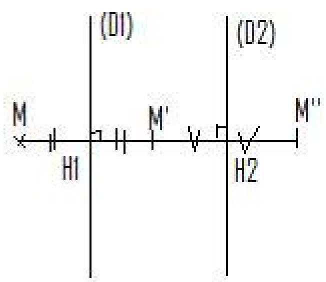
14.3.2 Les axes sont sécantes



On a $OM = OM'$ et $OM' = OM''$ donc $OM = OM''$ (1)
on a $\widehat{MOM''} = \widehat{MOM'} + \widehat{M'OM''}$
or $\widehat{MOM'} = \widehat{MOH_1} + \widehat{H_1OM'}$ $\widehat{MOH_1} = \widehat{H_1OM'}$ car (D_1) est la bissectrice

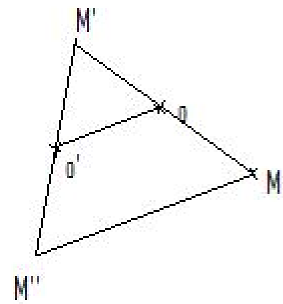
de l'angle $\widehat{MOM'}$ donc $\widehat{MOM'} = 2\widehat{H_1OM'}$
De même $\widehat{M'OM''} = 2\widehat{M'OH_2}$
donc $\widehat{MOM''} = 2\widehat{H_1OM'} + 2\widehat{M'OH_2} = 2(\widehat{H_1OM'} + \widehat{M'OH_2})$
d'ou $\widehat{MOM''} = 2\widehat{H_1OH_2}$
Ainsi M'' est la rotation de centre O et d'angle $2\widehat{H_1OH_2}$
Propriété :une succession de symétrie orthogonale d'axes sécantes est une **rotation**.

14.3.3 Les axes sont paralléles



On a D_1 et (D_2) deux droites parallèles et $s_{(D_1)}(M) = M'$ et $s_{(D_2)}(M') = M''$
D'aprés la relation de CHALES :on a :$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''}$ or $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{H_1M'}$ et $\overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'H_2}$ d'ou $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{H_1M'} + 2\overrightarrow{M'H_2} = 2(\overrightarrow{H_1M'} + \overrightarrow{M'H_2})$
donc $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{H_1H_2}$ Ainsi $M'' = t_{2\overrightarrow{H_1H_2}}(M)$
Propriété :Une succession de symétrie orthogonale d'axes parallèles est une **translation de vecteur**.

14.4 symétrie centrale successive



On sait que $MM'' = 2OO'$ et $(MM'') \| (OO')$ (d'aprés le théorème sur les droites des milieu dans un triangle vue en 4eme)
donc $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{OO'}$ d'ou $M'' = t_{2\overrightarrow{OO'}}(M)$
Propriété :Une succession de symétrie centrale est une **translation de vecteur**.

14.5 Translation successive

Une translation successive est une translation du vecteur somme.

14.6 Exercices d'Application

CORRECTIONS DES EXERCICES D'APPLICATION

IL EST CONSEILLE AUX ELEVES
QUE AVANT DE REGARDER CETTE PARTIE
IL FAUT IMPERATIVEMENT ESSAYER
LES EXERCICES D'APPLICATIONS

Chapitre 15

CORRECTIONS DES EXERCICES

15.1 Correction des exercices Racine carrée

15.1.1 Corrigé Exercice 1 :B.F.E.M 1997

1)calculons $X = \sqrt{500} + 3\sqrt{5} - 3\sqrt{45}$
$X = \sqrt{100 \times 5} + 3\sqrt{5} - \sqrt{9 \times 5}$
$X = \sqrt{100} \times \sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 3\sqrt{9} \times \sqrt{5}$
$X = 10\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 3 \times 3\sqrt{5}$
$X = 10\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 9\sqrt{5}$
$X = 4\sqrt{5}$ 2)calculons A^2,B^2,$A \times B$
$A = 2 + \sqrt{6}$
$A^2 = (2 + \sqrt{6})^2 = 4 + 2 \times 2 \times \sqrt{6} + 6 = 10 + 4\sqrt{6}$

$$A^2 = 10 + 4\sqrt{6}$$

$B = 1 - \sqrt{6}$
$B^2 = (1 - \sqrt{6})^2 = 1 - 2 \times 1 \times \sqrt{6} + 6 = 7 - 2\sqrt{6}$

$$B^2 = 7 - 2\sqrt{6}$$

$A \times B = (2 + \sqrt{6})(1 - \sqrt{6}) = 2 - 2\sqrt{6} + \sqrt{6} - 6 = -4 - \sqrt{6}$

$$A \times B = -4 - \sqrt{6}$$

15.1.2 Corrigé Exercice 2 :B.F.E.M 1999

1)calculons a^2,b^2
$a = 1 + \sqrt{5}$
$a^2 = (1 + \sqrt{5})^2 = 1 + 2 \times \sqrt{5} + 5 = 6 + 2\sqrt{5}$

$$a^2 = 6 + 2\sqrt{5}$$

$b = 1 - \sqrt{3}$
$b^2 = (1 - \sqrt{3})^2 = 1 - 2\sqrt{3} + 3 = 4 - 2\sqrt{3}$

$$b^2 = 4 - 2\sqrt{3}$$

2)Simplifions c
$c = \frac{1+\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})^2} = \frac{1}{1+\sqrt{5}}$

$$c = \frac{1}{1+\sqrt{5}}$$

Rendons rationnel le dénominateur
$c = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{1\times(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{1-\sqrt{5}}{1-5} = \frac{1-\sqrt{5}}{-4} = -\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

$$c = -\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

Effectuons le produit $a \times c$
$a \times c = (1+\sqrt{5})(-\frac{1-\sqrt{5}}{4}) = -\frac{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{4} = -\frac{1-5}{4} = \frac{4}{4} = 1$

$$a \times c = 1$$

donc a représente l'inverse de c
3)Montrons que d est un entier relatif
$d = \frac{2-\sqrt{12}}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \frac{2-2\sqrt{3}}{\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}} = \frac{2-2\sqrt{3}}{-(1-\sqrt{3})} = -\frac{2(1-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})} = -2$

$$d = -2$$

d'ou d est un entier relatif.

15.1.3 Corrigé Exercice 3 :B.F.E.M 2001

1)calculons p et puis rendons rationnel q
$p = [(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - 1][(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 1]$

$p = (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{3}+\sqrt{2}) - (\sqrt{3}-\sqrt{2}) - 1$
$p = 3 - 2 + \sqrt{3} + \sqrt{2}) - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$

$$p = 2\sqrt{2}$$

$q = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1\times(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = -(1-\sqrt{2})$

$$q = \sqrt{2} - 1$$

2)Montrons que $\frac{p+q^2}{p-2q} \in D$
$q^2 = (\sqrt{2}-1)^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$
$2q = 2(\sqrt{2}-1) = 2\sqrt{2} - 2$
$\frac{p+q^2}{p-2q} = \frac{2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+2} = \frac{3}{2} = 1,5$

$$\frac{p+q^2}{p-2q} = 1,5$$

d'ou $\frac{p+q^2}{p-2q} \in D$
3)résolvons l'équation :
$px^2 + q^2 - 3 = 2\sqrt{2}x^2 + 3 - 2\sqrt{2} - 3 = 2\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2}$
donc $px^2 + q^2 - 3 = 0$ ssi $2\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2} = 0$ ssi $2\sqrt{2}(x^2-1) = 0$ ssi $x^2 - 1 = 0$
or $x^2 - 1 = 0$ ssi $(x-1)(x+1) = 0$ ssi $x - 1 = 0$ ou $x + 1 = 0$ ssi $x = 1$ ou $x = -1$
$S = \{-1; 1\}$

15.2 correction des Exercices calcul algebrique

15.2.1 Corrigé Exercice 1 :B.F.E.M 2005

1)Déveleppons ,puis réduisons et ordonnons $f(x)$ et $g(x)$
$f(x) = (3x-5)^2 - (2x-1)^2$ $f(x) = (9x^2 - 2\times5\times3x + 25) - (4x^2 - 2\times1\times2x + 1)$
$f(x) = 9x^2 - 30x + 25 - 4x^2 + 4x - 1$

$$f(x) = 5x^2 - 26x + 24$$

$g(x) = x^2 + (2x+1)(5-x) - 25$
$g(x) = x^2 + 2x\times5 - 2x\times x + 5 - x - 25$

$g(x) = x^2 + 10x - 2x^2 + 5 - x - 25$

$$g(x) = -x^2 + 9x - 20$$

2)Factorisons $f(x)$ et $g(x)$
$f(x) = (3x-5)^2 - (2x-1)^2$
$f(x) = [(3x-5) - (2x-1)][(3x-5) + (2x-1)]$
$f(x) = (3x - 5 - 2x + 1)(3x - 5 + 2x - 1)$

$$f(x) = (x-4)(5x-6)$$

$g(x) = x^2 + (2x+1)(5-x) - 25$
$g(x) = x^2 - 25 + (2x+1)(5-x)$
$g(x) = (x-5)(x+5) + (2x+1)(5-x)$
$g(x) = (x-5)(x+5) - (x-5)(2x+1)$
$g(x) = (x-5)[(x+5) - (2x+1)]$ $g(x) = (x-5)(x+5-2x-1)$
$g(x) = (x-5)(-x+4)$

$$g(x) = -(x-5)(x-4)$$

3-a)Donnons la condition d'existence puis simplifions
$h(x) = \frac{(x-4)(5x+6)}{(5-x)(x-4)}$
$h(x)$ existe ssi $(5-x)(x-4) \neq 0$
or $(5-x)(x-4) = 0$ ssi $5 - x = 0$ ou $x - 4 = 0$ ssi $x = 5$ ou $x = 4$
$h(x)$ existe ssi

$$x \neq 5 \ et \ x \neq 4$$

Simplifions $h(x) = \frac{(x-4)(5x+6)}{(5-x)(x-4)}$
Pour tout $x \neq 5$ et $x \neq 4$ alors

$$h(x) = \frac{5x+6}{5-x}$$

3-b)Résolvons $|h(x)| = 2$
$|h(x)| = 2$ ssi $h(x) = 2$ ou $h(x) = -2$
$h(x) = 2$ ssi $\frac{5x+6}{5-x} = 2$ ssi $5x + 6 = 2(5-x)$ ssi $5x + 6 = 10 - 2x$ ssi $5x + 2x = 10 - 6$ ssi $7x = 4$ ssi $x = \frac{4}{7}$ $h(x) = -2$ ssi $\frac{5x+6}{5-x} = -2$ ssi $5x + 6 = -2(5-x)$ ssi $5x + 6 = -10 + 2x$ ssi $5x - 2x = -10 - 6$ ssi $3x = -16$ ssi $\frac{-16}{3}$

$$S = \left\{\frac{-16}{3}; \frac{4}{7}\right\}$$

15.2.2 Corrigé Exercice 2 :B.F.E.M 1998

1)ecrivons A sous forme $a+\sqrt{b}$
$A=\sqrt{121}-2\sqrt{112}+\sqrt{63}-\sqrt{81}$
$A=11-2\sqrt{16\times 7}+\sqrt{9\times 7}-9$
$A=11-2\times 4\sqrt{7}+3\sqrt{7}-9$
$A=11-8\sqrt{7}+3\sqrt{7}-9$

$$A=2-5\sqrt{7}$$

2-a)Factorisons $B(x)$
$B(x)=x-1+(x+7)(2x-2)$
$B(x)=x-1+2(x+7)(x-1)$
$B(x)=(x-1)[1-2(x+7)]$
$B(x)=(x-1)(1-2x-14)$
$B(x)=(x-1)(-2x-13)$

$$B(x)=-(x-1)(2x+13)$$

2-b)Developpons $B(x)$
$B(x)=x-1+(x+7)(2x-2)$
$B(x)=(x-1)+(2x^2-2x+14x-14)$
$B(x)=x-1+2x^2-2x+14x-14$

$$B(x)=2x^2+12x-15$$

3-a)établissons la condition d'existence et simplifions $q(x)$
$q(x)=\frac{B(x)}{(x-1)(x+7)}$
$q(x)$ existe ssi $(x-1)(x+7)\neq$
or $(x-1)(x+7)=0$ ssi $x-1=0$ ou $x+7=0$ ssi $x=1$ ou $x=-7$
donc $q(x)$ existe ssi $x\neq -7$ et $x\neq 1$
Simplifions $q(x)$
$q(x)=\frac{B(x)}{(x-1)(x+7)}=\frac{-(x-1)(2x+13)}{(x-1)(x+7)}$
Pour tout $x\neq -7$ et $x\neq 1$ alors

$$q(x)=-\frac{2x+13}{x+7}$$

3-b)calculons $q(x)$ pour $x = 1$ et pour $x = \sqrt{2}$
pour $x = 1$ $q(1) = -\frac{2\times1+13}{1+7} = -\frac{15}{8}$

$$q(1) = -\frac{15}{8}$$

pour $x = \sqrt{2}$
$q(\sqrt{2}) = -\frac{2\sqrt{2}+13}{\sqrt{2}+7} = -\frac{(2\sqrt{2}+13)(2\sqrt{2}-7)}{(2\sqrt{2}+7)(2\sqrt{2}-7)} = -\frac{8-14\sqrt{2}+26\sqrt{2}-91}{8-49} = -\frac{12\sqrt{2}-83}{-41}$

$$q(\sqrt{2}) = \frac{12\sqrt{2}-83}{41}$$

15.3 Correction des Exercices Equation et Inéquation

15.3.1 Corrigé Exercice 1 :B.F.E.M 2010

1)Developpons $A(x)$
$A(x) = (2x+1)(5x+1) - (4x+2)(x-2)$
$A(x) = (10x^2 + 2x + 5x + 1) - (4x^2 - 8x + 2x - 4)$
$A(x) = 10x^2 + 2x + 5x + 1 - 4x^2 + 8x - 2x + 4$

$$A(x) = 6x^2 + 13x + 5$$

2)Factorisons $A(x)$
$A(x) = (2x+1)(5x+1) - (4x+2)(x-2)$
$A(x) = (2x+1)(5x+1) - 2(2x+1)(x-2)$
$A(x) = (2x+1)[(5x+1) - 2(x-2)]$
$A(x) = (2x+1)(5x+1-2x+4)$

$$A(x) = (2x+1)(3x+5)$$

3) Résolvons l'inéquation :$(2x+1)(3x+5) \leq 0$
$2x+1 = 0$ ssi $x = \frac{-1}{2}$;$2x+1 \prec 0$ ssi $x \prec \frac{-1}{2}$
$3x+5 = 0$ ssi $x = \frac{-5}{3}$;$3x+5 \prec 0$ ssi $x \prec \frac{-5}{3}$

x	$-\infty$ $\quad$ $-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$ $\quad$ $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ $\quad$ $+\infty$
$3x+5$	$-$ $\quad$ 0	$+$	$+$
$2x+1$	$-$	$-$ $\quad$ 0	$+$
$A(x)$		$-$	

$$S = [-\frac{5}{3}; -\frac{1}{2}]$$

15.3.2 Corrigé Exercice 2 :B.F.E.M 2009

1)Montrons que a et b sont opposés

Rappel :deux nombres sont opposés si leur somme est égal à zéro.

$a = 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$ $b = \frac{1}{3\sqrt{2}+4}$ $b = \frac{1}{3\sqrt{2}+4} = \frac{3\sqrt{2}-4}{(3\sqrt{2}+4)(3\sqrt{2}-4)} = \frac{3\sqrt{2}-4}{18-16} = \frac{3\sqrt{2}-4}{2}$

$a + b = 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}-4}{2} = \frac{4-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4}{2} = \frac{0}{2} = 0$

donc $a + b = 0$ d'ou a et b sont opposés.

2)Montrons que $A = 5 - 5\sqrt{2}$,puis encadrons A.

$A = \sqrt{(1-2\sqrt{2})^2} + (\sqrt{2}-2)^2 - \sqrt{18}$

$A = |1 - 2\sqrt{2}| + (2 - 4\sqrt{2} + 4) - 3\sqrt{2}$

$A = -(1 - 2\sqrt{2}) + (6 - 4\sqrt{2}) - 3\sqrt{2}$

$A = -1 + 2\sqrt{2} + 6 - 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$

$$A = 5 - 5\sqrt{2}$$

Encadrons A

On a $1,414 \prec \sqrt{2} \prec 1,415$

$-5 \times 1,414 \succ -5\sqrt{2} \succ -5 \times 1,415$

$-7,07 \succ -5\sqrt{2} \succ -7,075$

$-7,075 \prec -5\sqrt{2} \prec -7,07$

$5 - 7,075 \prec 5 - 5\sqrt{2} \prec -7,07 + 5$

$-2,075 \prec 5 - 5\sqrt{2} \prec -2,07$

$-2,08 \prec 5 - 5\sqrt{2} \prec -2,07$

3-a)Montrons que $f(x) = (x-2)(1-7x)$

$f(x) = 5x^2 - 20 + (-3x+6)(4x+3)$

$f(x) = 5(x^2 - 4) - 3(x - 2)(4x + 3)$
$f(x) = 5(x - 2)(x + 2) - 3(x - 2)(4x + 3)$
$f(x) = (x - 2)[5(x + 2) - 3(4x + 3)]$
$f(x) = (x - 2)(5x + 10 - 12x - 9)$

$$f(x) = (x - 2)(1 - 7x)$$

3-b)Résolvons l'inéquation $f(x) \leq 0$
$x - 2 = 0$ ssi $x = 2$; $x - 2 \succ 0$ ssi $x \succ 0$
$1 - 7x = 0$ ssi $x = \frac{1}{7}$;$1 - 7x \succ 0$ ssi $x \prec \frac{1}{7}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{7}$		2		$+\infty$
x-2		$-$		$-$	0	$+$	
1-7x		$+$	0	$-$		$-$	
f(x)		$-$		$+$		$-$	

$$S =]-\infty; \frac{1}{7}] \cup [2; +\infty[$$

15.3.3 Corrigé Exercice 3 :B.F.E.M 2002

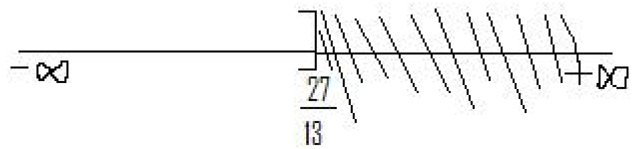
1)Developpons,puis réduire M
$M = 4(x - 1)^2 - (x - 5)^2$
$M = 4(x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 10x + 25)$
$M = 4x^2 - 8x + 4 - x^2 + 10x - 25$

$$M = 3x^2 + 2x - 21$$

$N = x^2 + 9 - 6x - (3 - x)(2x + 1)$
$N = (x^2 - 6x + 9) - (3 - x)(2x + 1)$
$N = (x - 3)^2 + (x - 3)(2x + 1)$
$N = (x - 3)[(x - 3) + (2x + 1)]$
$N = (x - 3)(x - 3 + 2x + 1)$

$$N = (x - 3)(3x - 2)$$

$N = 3x^2 - 2x - 9x + 6 = 3x^2 - 11x + 6$
$M \leq N$ ssi $3x^2 + 2x - 21 \leq 3x^2 - 11x + 6$ ssi $3x^2 + 2x - 3x^2 + 11x \leq 21 + 6$ ssi $13x \leq 27$ ssi $x \leq \frac{27}{13}$



La partie non hachurée est la solution de l'inéquation.

15.4 Correction des Exercices systeme d'équation

15.4.1 Corrigé Exercice 1 :B.F.E.M 1998

1)Mettons le probleme sous forme de systeme d'équation
Soit x l'économie de ASSANE
Y l'économie de OUSEYNOU
on a : $y = \frac{4}{5}x$
d'autre part $x + y + 2720 = 20000$
Ainsi on a le systeme suivante :

$$\begin{cases} y = \frac{4}{5}x \\ x + y + 2720 = 20000 \end{cases}$$

2)Calculons le montant des économies de chacun
$\begin{cases} y = \frac{4}{5}x \\ x + y + 2720 = 20000 \end{cases}$ $\begin{cases} 5y - 4x = 0 \\ x + y + 2720 = 20000 \end{cases}$
faisons la méthode d'addition
$\begin{cases} 5y - 4x = 0 \\ (x + y + 2720 = 20000) \quad \times 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 5y - 4x = 0 \ \ (1) \\ 4x + 4y + 10880 = 80000 \ \ (2) \end{cases}$
(1)+(2) donne $9y + 10880 = 80000$ ssi $9y = 80000 - 10880$ ssi $9y = 69120$ ssi $y = \frac{69120}{9}$ ssi $y = 7680$
donc $x = \frac{5}{4} \times 7680$ ssi $x = 9600$
d'ou l'economie de ASSANE est 9600frs
l'economie de OUSSEYNOU est 7680frs

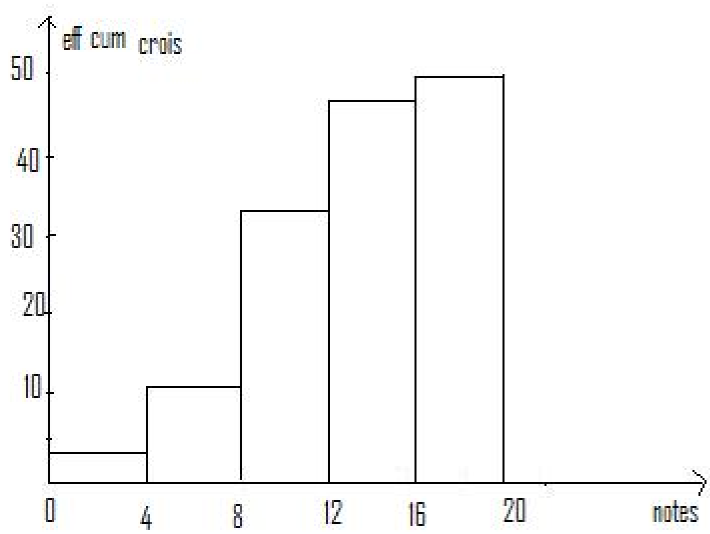
15.5 Correction des Exercices Statistique

15.5.1 Corrigé Exercice 1 :B.F.E.M 2009

1.partie
1-a)3 représente le nombre d'élève qui ont eu 6.
1-b)15 élèves ont eu inférieur ou égal á 8.
1-c)46 élèves ont eu une superieur ou égal à 5.
1-d)98 est le pourcentage des élèves ont eu une note inférieur ou égal à 16.
2) le pourcentage d'elèves qui ont moins de 14 est 84.
2.partie
1)Recopions le tableau et complétons ce tableau.

Notes	$[0;4[$	$[4;8[$	$[8;12[$	$[12;16[$	$[16;20[$
Effectifs	3	8	23	13	3
Eff.cum. crois.(ECC)	3	11	34	47	50
centre de classe	2	6	10	14	18

2)l'histograme des effectifs cumulés croissants



3)calculons la moyenne de la classe.
$moyenne = \frac{3\times2+8\times6+23\times10+13\times14+3\times18}{50} = \frac{6+48+230+182+54}{50}$
$moyenne = \frac{520}{50} = 10,4$
d'ou la moyenne des notes des élèves est 10,4.

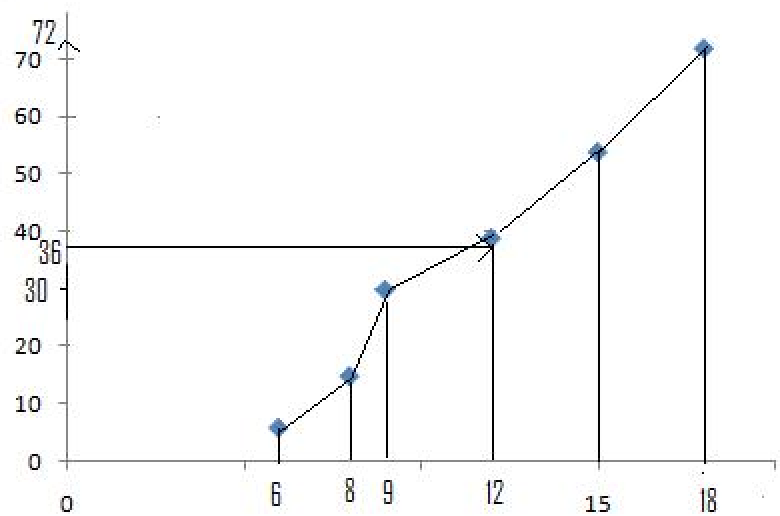
15.5.2 Corrigé Exercice 2 :B.F.E.M 2003

1)Calculons la note x
$moy = \frac{6\times6+8\times9+9\times15+12\times9+15\times15+x\times18}{72}$
$12,5 = \frac{36+72+135+108+225+18x}{72}$ ssi $72 \times 12,5 = 576 + 18x$ ssi $18x = 900 - 576$
ssi $18x = 324$ $x = \frac{324}{18} = 18$
d'ou

$$x = 18$$

Notes	6	8	9	12	15	18
Effectifs	6	9	15	9	15	18
ECC	6	15	30	39	54	72
ECD	72	66	57	42	33	18

2) le nombre d'élèves qui ont eu au moins 12 est 42.
3) le nombre d'élèves qui ont eu au plus 15 est 54.
$\frac{54\times100}{72} = 75$ Ainsi le pourcentage d'élèves qui ont eu au plus 15 est de 75%
4)on trace le polygone des éffectifs cumulés croissants.



la note médiane est de 12.
5)diagrame circulaire
on calcule l'angle correspondant pour chaque éffectif.
$x = \frac{6\times360}{72} = 30$;$x = \frac{9\times360}{72} = 45$; $x = \frac{18\times360}{72} = 90$

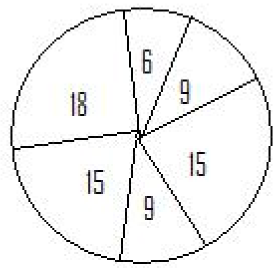


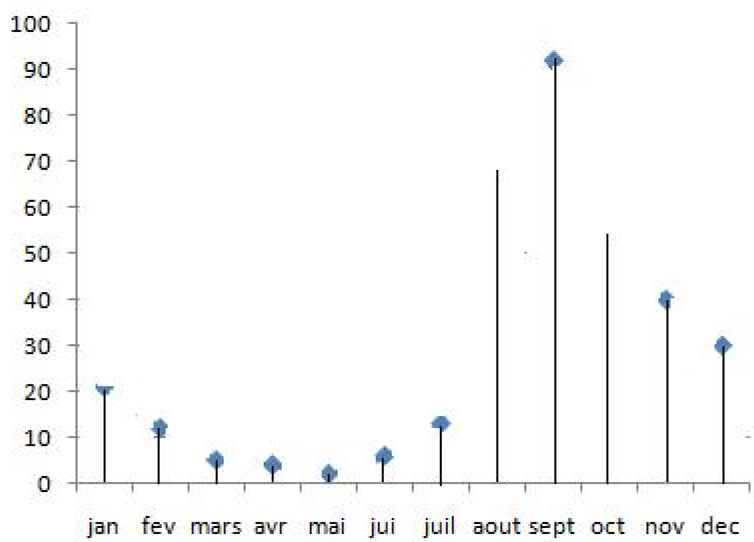
diagramme circulaire

15.5.3 Corrigé Exercice 3 :B.F.E.M 1999

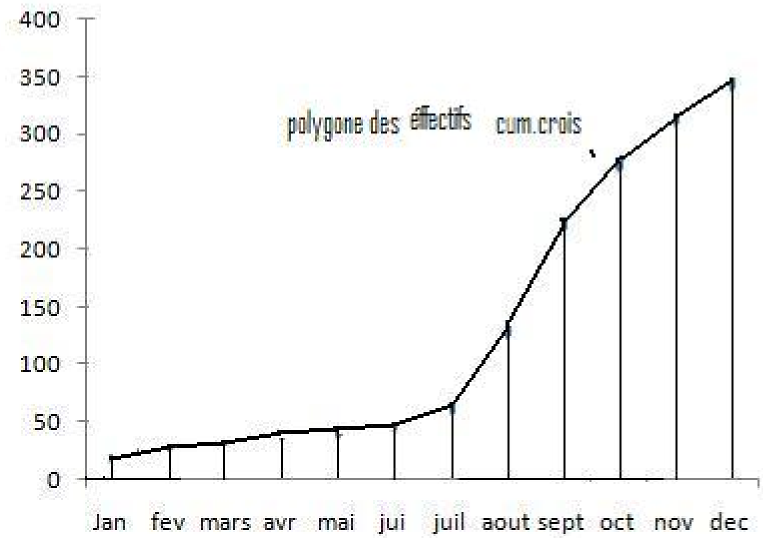
1)Ajoutons au tableau la liste des éffectifs cumulés croissants

mois	jan	fev	Mar	Avr	Mai	Jui	Juil	Aou	Sep	Oct	Nov	Dec
cas	21	12	5	4	2	6	13	68	92	53	40	30
E.C.C	21	33	38	42	44	50	63	131	223	276	316	346

2)Traçons le diagramme en baton.



3)représentation de la polygone des fréquence



4)le nombre de malade par mois
$nbr = \frac{effectif\ total}{12} = \frac{346}{12} = 28,83$
donc le nombre de malade par mois est 28,83
5-a)Le nombre de décés de malades du palydisme est $\frac{346 \times 10,5}{100} = 36,33$
5-b) le nombre total de décés du dispensaire est $\frac{36,33 \times 100}{75} = 48,44$

15.5.4 Corrigé Exercice 4 :B.F.E.M 2006

1)les classes d'amplitude 4kg sont :$[50;54[$;$[54;58[$;$[58;62[$;$[62;66[$
2)Le tableau des effectifs coorespondants :

Notes	$[50;54[$	$[54;58[$	$[58;62[$	$[62;66[$
Effectifs	4	8	12	6

La classe médiane est $[58;62[$
3)Déssinons le diagramme circulaire :soit x l'angle correspondant à chaque choix.
$x = \frac{4 \times 360}{30} = 48$; $x = \frac{8 \times 360}{30} = 96$;$x = \frac{12 \times 360}{30} = 144$;$x = \frac{6 \times 360}{30} = 72$

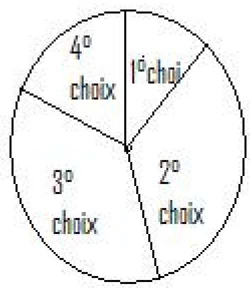


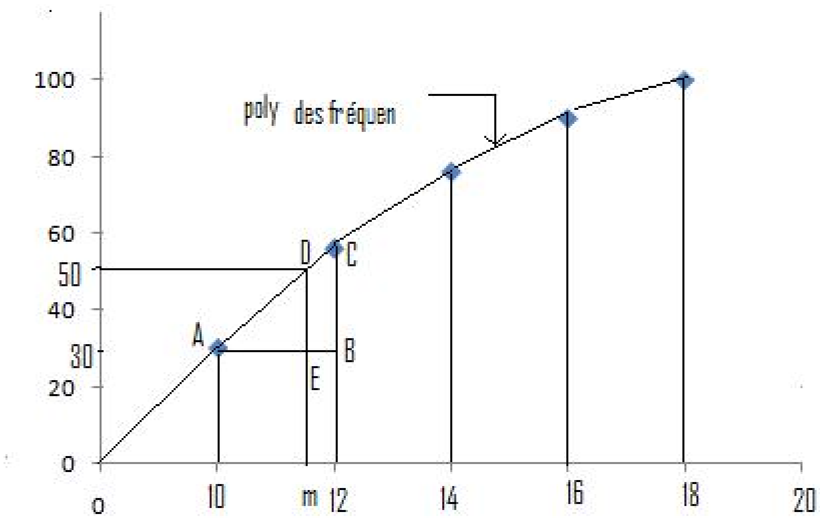
diagramme circulaire

4)Calculons le prix d'un mouton du 3eme choix :soit x le prix d'un mouton du 3eme choix.
on a le prix moyen est 62000 donc $62000 = \frac{6\times70000+12\times65000+8x+4\times52500}{30}$ ssi $30\times62000 = 420000+780000+8x+210000$ ssi $1860000-420000-780000-210000 = 8x$ ssi $8x = 450000$ ssi $x = \frac{450000}{8} = 56250$
donc le prix d'un mouton du 3 choix est 56250.

15.5.5 Corrigé Exercice 5 :B.F.E.M 2002

1)Calculons l'angle A
on a $360 = 108+93,6+A+50,4+36$ donc $A = 360-108-93,6-50,4-36 = 72$ d'ou $A = 72$.
2)Calculons les éffectifs correspondants au différentes intervalles.
on a $x = \frac{n\times360}{N}$ donc $n = \frac{x\times N}{360}$
pour $[10;12[$ on a $n = \frac{108\times50}{360} = 15$; pour $[12;14[$ on a $n = \frac{93{,}6\times50}{360} = 13$
pour $[14;16[$ on a $n = \frac{72\times50}{360} = 10$; pour $[16;18[$ on a $n = \frac{50{,}4\times50}{360} = 7$
pour $[18;20[$ on a $n = \frac{36\times50}{360} = 5$ 3)Calculons la valeur moyenne de bourse attribué.
$Vmoyenne = \frac{15\times10000+13\times15000+10\times20000+7\times25000+5\times30000}{50}$
$Vmoyenne = \frac{150000+195000+200000+175000+150000}{50} = 17400$
Ainsi la valeur moyenne de bourse est de 17400.
4-a)Les élèves qui ont une note au moins égale à 12 est $5+7+10+13 = 35$ donc c'est 35 élèves.
Le pourcentage est $\frac{35\times100}{50} = 70$ donc c'est 70%.
4-b)Le nombre délèves qui ont une bourse au plus égale à 25000 est $15+13+10+7 = 45$ donc c'est 45 élèves.
5-a)construisons le polygone des fréquence cumulés en %.

Notes	[10; 12[	[12; 14[	[14; 16[	[16; 18[	[18; 20[
Effectifs	15	13	10	7	5
Fréquence	30	26	20	14	10
F.C.C en %	30	56	76	90	100



5-b)D'aprés le théorème de THALES et sur la figure : on a les triangles ABC et ADE sont en position de Thales.
donc $\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC}$ or $AB = 12 - 10 = 2$;$AE = m - 10$;$DE = 50 - 30 = 20$ et $BC = 56 - 30 = 26$
d'ou $\frac{m-10}{2} = \frac{20}{26}$ ssi $26(m - 10) = 2 \times 20$ ssi $26m - 260 = 40$ ssi $26m = 300$ ssi $m = \frac{300}{26} = 11,53$ d'ou la note médiane est 11,53.

15.6 Correction des Exercices Application linéaire et Affine

15.6.1 Corrigé Exercice 1 :B.F.E.M 2010

1)justifions que $p = \frac{5}{4}x$
on a $p = x + \frac{25}{100}x = x + \frac{1}{4}x = \frac{4x+x}{4} = \frac{5}{4}x$

$$p = \frac{5}{4}x$$

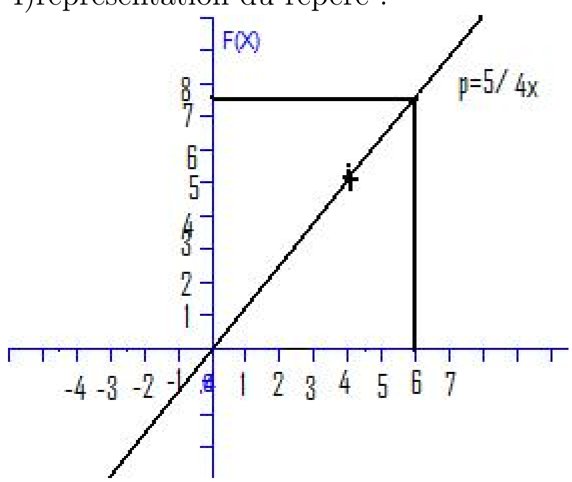
2)Calculons le prix de vente d'un article acheté 400F.
$p = \frac{5}{4} \times 400 = 500$

$$p = 500F$$

3)Calculons le prix d'achat
$1250 = \frac{5}{4}x$ ssi $x = \frac{4\times1250}{5} = 1000$

$$x = 1000F$$

4)représentation du repère .



5)d'aprés le graphique le prix d'achat est $600F$.

15.6.2 Corrigé Exercice 2 :B.F.E.M 2003

1)Developpons et réduisons $H(x)$ et $G(x)$
$H(x) = 4(x+\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3}(x+\sqrt{3}) + 3$
$H(x) = 4(x^2 + 2x\sqrt{3} + 3) - 4x\sqrt{3} - 12 + 3$
$H(x) = 4x^2 + 8x\sqrt{3} + 12 - 4x\sqrt{3} - 12 + 3$

$$H(x) = 4x^2 + 4x\sqrt{3} + 3$$

$G(x) = (2x+\sqrt{3})^2$
$G(x) = ((2x)^2 + 2 \times 2x \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2)$

$$G(x) = 4x^2 + 4x\sqrt{3} + 3$$

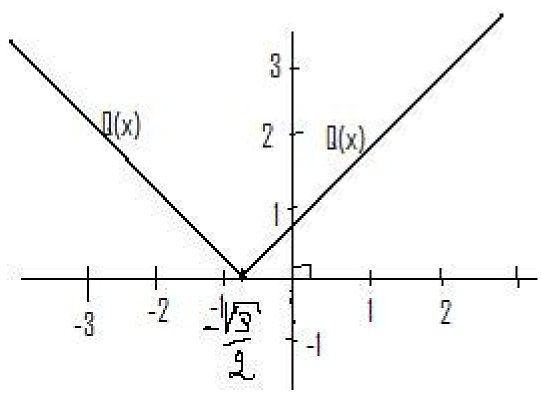
2)Déduisons la factorisation de $H(x)$
aprés le developpement on a $H(x) = G(x)$ donc

$$H(x) = (2x + \sqrt{3})^2$$

3-a)Résolvons l'equation $Q(x) = 2\sqrt{3}$
$Q(x) = 2\sqrt{3}$ ssi $\sqrt{H(x)} = 2\sqrt{3}$ ssi $\sqrt{(2x+\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$ ssi $\left|2x + \sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}$
or $\left|2x + \sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}$ ssi $2x + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ ou $2x + \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$
$2x + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ ssi $2x = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}$ ssi $2x = \sqrt{3}$ ssi $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$2x + \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$ ssi $2x = -2\sqrt{3} - \sqrt{3}$ ssi $2x = -3\sqrt{3}$ ssi $x = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$

$$S = \left\{ \frac{-3\sqrt{3}}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

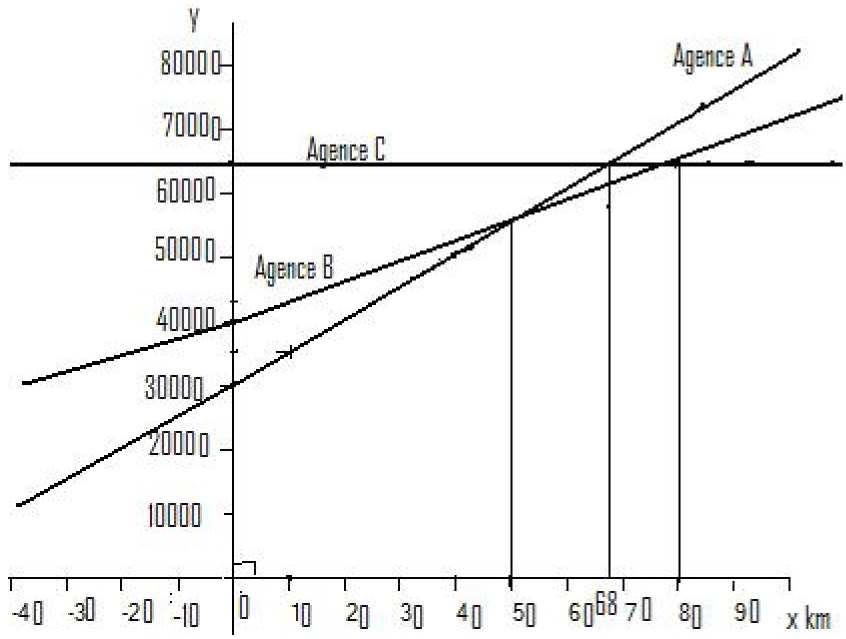
3-b)Représentons Q
$Q(x) = \sqrt{H(x)} = \sqrt{(2x+\sqrt{3})^2} = \left|2x + \sqrt{3}\right|$ donc Q est une application affine par intervalle.
$Q(x) = 2x + \sqrt{3}$ ssi $2x + \sqrt{3} \geq 0$ ssi $x \geq \frac{-\sqrt{3}}{2}$
$Q(x) = -(2x + \sqrt{3})$ ssi $2x + \sqrt{3} \leq 0$ ssi $x \leq \frac{-\sqrt{3}}{2}$



15.6.3 Corrigé Exercice 3 :B.F.E.M 2004

1-a)établissons les relations
Pour l'agence A $y = 500x + 30000$
Pour l'agence B $y = 300x + 40000$

Pour l'agence C $y = 64000$
1-b)Représentation des agences dans le repère.



1-c)graphiquement à plus **50 km** l'agence A réclame plus que l'agence B graphiquement l'agence A et C réclame la même somme à **68 km**.
graphiquement à moins de **80 km** l'agence B réclame moins que l'agence C.
2-a) Sur le trajet THIES 70 km l'agence la moins chère c'est l'agence B.
Sur le trajet KAOLACK 192 km l'agence la moins chère c'est l'agence C.
2-b)L'agence qui n'aura aucune part de ce marché c'est l'agence A car sur chacun des deux trajets sa droite est au dessus de toute les doites des autres agences.
3)Soit x le nombre d'enfants qui composent le premier groupe.
y le nombre d'enfants qui composent le deuxieme groupe.
la somme qu'on doit dépenser :$5(300 \times 70 + 40000) + 2 \times 64000 = 433000$
on a : $x + y = 50$ et $5000x + 3000y + 223000 = 433000$

d'ou $\begin{cases} x + y = 50 \\ 5000x + 3000y + 223000 = 433000 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x + y = 50 \\ 5000x + 3000y = 210000 \end{cases}$

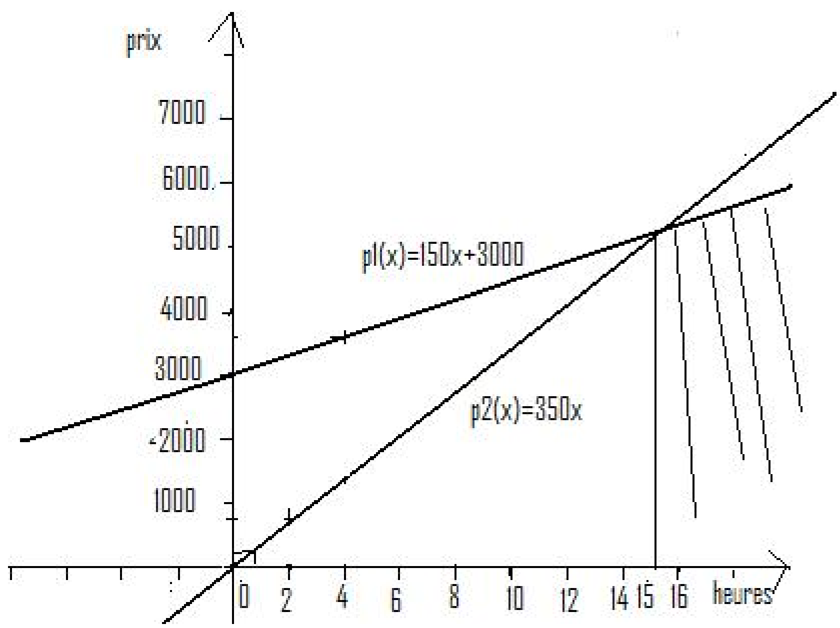
ssi $\begin{cases} x + y = 50 \ \times (-3) \\ 5x + 3y = 210 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} -3x - 3y = -150 \ (1) \\ 5x + 3y = 210 \ (2) \end{cases}$

faisons la méthode d'addition :(1)+(2) donne $2x = 60$ ssi $x = \frac{60}{2} = 30$
$y = 50 - 30 = 20$

donc le nombre d'enfants du premier groupe est 30 enfants.
le nombre d'enfants du deuxieme groupe est 20 enfants.

15.6.4 Corrigé Exercice 4 :B.F.E.M 2005

1)Montrons que $P_1(x) = 150x + 3000$ et $p_2(x) = 350x$
puisque le nomre d'heure est x et chaque heure on verse 150F ensuite on donne de plus un abonnement de 3000F alors
$P_1(x) = 150x + 3000$
De même $p_2(x) = 350x$
2)Représentation graphique



3)graphiquement la droite l'Option I est en dessous de la droite de l'Option II sur l'intervale $]15; +\infty[$
retrouvons le par calcul
$p_1(x) \prec p_2(x)$ ssi $150x + 3000 \prec 350x$ ssi $150x - 350x \prec -3000$ ssi $-200x \prec -3000$ ssi $x \succ \frac{-3000}{-200}$ ssi $x \succ 15$ donc $S =]15; +\infty[$ 4)graphiquement et même par le calcul,deux clients d'Otions différentes payeront le même prix au bout de **15h**.

15.6.5 Corrigé Exercice 5 :B.F.E.M 2006

1)Developpons $f(x)$ et $g(x)$
$f(x) = (3x-1)^2 - (1-3x)(x-1)$
$f(x) = (9x^2 - 6x + 1) - (x - 1 - 3x^2 + 3x)$
$f(x) = 9x^2 - 6x + 1 - x + 1 + 3x^2 - 3x$

$$f(x) = 12x^2 - 10x + 2$$

$g(x) = 3(9x^2 - 1) + (x-1)(3x-1) - 2x + 6x^2$
$g(x) = (27x^2 - 3) + (3x^2 - x - 3x + 1) - 2x + 6x^2$
$g(x) = 27x^2 - 3 + 3x^2 - x - 3x + 1 - 2x + 6x^2$

$$g(x) = 36x^2 - 6x - 2$$

2)Factorisons $f(x)$ et $g(x)$
$f(x) = (3x-1)^2 - (1-3x)(x-1)$
$f(x) = (3x-1)^2 + (3x-1)(x-1)$
$f(x) = (3x-1)[(3x-1) + (x-1)]$
$f(x) = (3x-1)(3x - 1 + x - 1)$
$f(x) = (3x-1)(4x-2)$

$$f(x) = 2(3x-1)(2x-1)$$

$g(x) = 3(9x^2 - 1) + (x-1)(3x-1) - 2x + 6x^2$
$g(x) = 3(3x-1)(3x+1) + (x-1)(3x-1) + 6x^2 - 2x$
$g(x) = 3(3x-1)(3x+1) + (x-1)(3x-1) + 2x(3x-1)$
$g(x) = (3x-1)[3(3x+1) + (x-1) + 2x$
$g(x) = (3x-1)(9x + 3 + x - 1 + 2x)$
$g(x) = (3x-1)(12x+2)$

$$g(x) = 2(3x-1)(6x+1)$$

Calculons $g(\sqrt{3})$
$g(\sqrt{3}) = 36(\sqrt{3})^2 - 6\sqrt{3} - 2$
$g(\sqrt{3}) = 36 \times 108 - 6\sqrt{3} - 2$

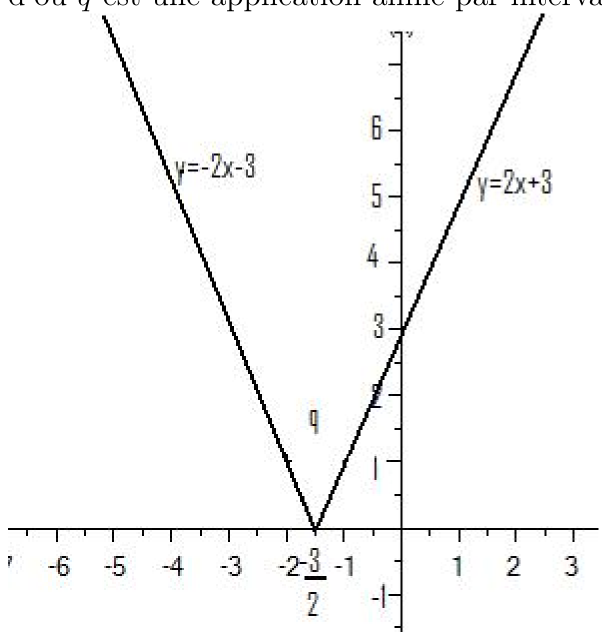
$$g(\sqrt{3}) = 106 - 6\sqrt{3}$$

Encadrons $g(\sqrt{3})$ on a $1,732 \prec \sqrt{3} \prec 1,733$
$-6 \times 1,732 \succ -6\sqrt{3} \succ -6 \times 1,733$

$-10,392 \succ -6\sqrt{3} \succ -10,398$
$-10,398 \prec -6\sqrt{3} \prec -10,392$
$106 - 10,398 \prec 106 - 6\sqrt{3} \prec 106 - 10,392$
$95,602 \prec 106 - 6\sqrt{3} \prec 95,608$ donc

$$95,60 \prec g(\sqrt{3}) \prec 95,61$$

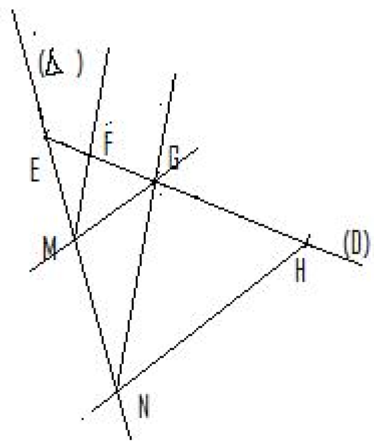
4)Montrons $h(x)$ est une application affine :
$h(x) = f(x) - (12x^2 - 27x + 4) = 12x^2 - 10x + 2 - 12x^2 + 27x - 4 = 17x + 2$
$h(x) = 17x + 2$ donc $h(x)$ s'ecrit sous la forme $ax + b$ d'ou h est une application affine.
h est strictement croissante car son coefficient linéaire 17 est striquement positif.
5)Représentons graphiquement $q(x) = |2x + 3|$
$q(x) = 2x + 3$ si et seulement si $2x + 3 \geq 0$ ssi $x \geq \frac{-3}{2}$
$q(x) = -(2x + 3)$ si et seulement si $2x + 3 \leq 0$ ssi $x \leq \frac{-3}{2}$
d'ou q est une application affine par intervalle.



15.7 Correction Exercice sur THALES

15.7.1 Corrigé Exercice 1 :B.F.E.M 1999

1)Faisons la figure



2)Montrons que $EG^2 = EF \times EH$
On a E,G et H alignés d'une part et E,M et N alignés d'autre part.$(GM)\|(HN)$ d'ou les triangles EGM et EHN sont en position de THALES.
Donc $\frac{EG}{EH} = \frac{EM}{EN}$ (1)
De même les triangles EFM et EGN sont en position de THALES.
Donc $\frac{EF}{EG} = \frac{EM}{EN}$ (2)
(1) et (2) entrainent $\frac{EG}{EH} = \frac{EF}{EG}$ d'ou $EG \times EG = EF \times EH$ donc

$$EG^2 = EF \times EH$$

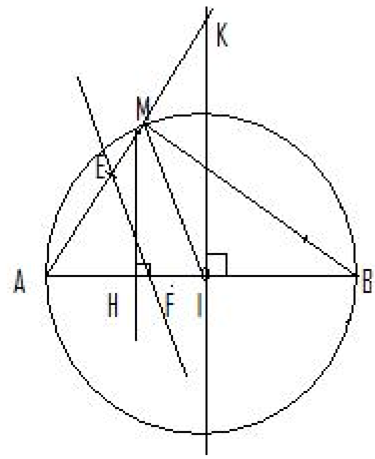
3)Calculons EF en fonction de x
on a $EG = 1$ et $EH = x$ $EF = \frac{EG^2}{EH}$ d'ou

$$EF = \frac{1}{x}$$

15.8 Correction Exercice sur Trigonométrie

15.8.1 Corrigé Exercice 1 :B.F.E.M 2005

1-a)construisons le cercle et les points.



1-b)Donnons la nature de AMI
ona $AI = IM = AM = 4cm$ et AMI un triangle
or un triangle qui a ses trois côtés égaux est un triangle équilatéral.
donc AMI est un triangle équilatéral.
1-c)Déduisons la mesure de l'angle $\widehat{BIM}$
ona $\widehat{AIB} = \widehat{AIM} + \widehat{BIM}$ donc $\widehat{BIM} = \widehat{AIB} - \widehat{AIM}$ or $\widehat{AIB} = 180$ car étant un angle plat.
donc $\widehat{BIM} = 180 - \widehat{AIM}$
D'autre part AIM est un triangle équilatéral
or Dans un triangle équilatéral les angles sont égaux à 60
donc $\widehat{AIM} = 60$
Ainsi $\widehat{BIM} = 180 - 60 = 120$

$$\widehat{BIM} = 120$$

2-a)justifions que AMB est un triangle rectangle.
$M \in \varsigma$
et $[AB]$ est un diamètre du cercle.
or tout point sur un cercle voit son diamètre sous un angle droit.
donc $\widehat{AMB}$ est angle droit d'ou AMB est un triangle rectangle en M.
2-b)Calculons KA et KI
On a dans le triangle rectangle AMB $\cos\widehat{BAM} = \frac{AM}{AB}$
dans le triangle AIK rectangle en I $\cos\widehat{KAI} = \frac{AI}{KA}$
D'autre part $\cos\widehat{BAM} = \cos\widehat{KAI}$ car c'est le même angle.
donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AI}{KA}$ d'ou $KA = \frac{AI \times AB}{AM}$

A.N : $KA = \frac{4\times 8}{4} = 8cm$ d'ou

$$KA = 8cm$$

Puisque le triangle AIK est rectangle en I D'aprés le Théoreme de PYTHAGORE
on a :$KA^2 = AI^2 + KI^2$ d'ou $KI^2 = KA^2 - AI^2$
A.N :$KI^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$ d'ou $KI = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$$KI = 4\sqrt{3}cm$$

3-a)Calculons $\cos\widehat{B}$ de deux manieres différentes.
dans le triangle rectangle AMB on a $\cos\widehat{B} = \frac{BM}{AB}$
dans le triangle rectangle MBH rectangle en H on a $\cos\widehat{B} = \frac{BH}{BM}$
3-b)Exprimons BH en fonction de $\cos\widehat{B}$ puis montrons $BH = \frac{BM^2}{AB}$
on a $\cos\widehat{B} = \frac{BH}{BM}$ donc

$$BH = BM \times \cos\widehat{B}$$

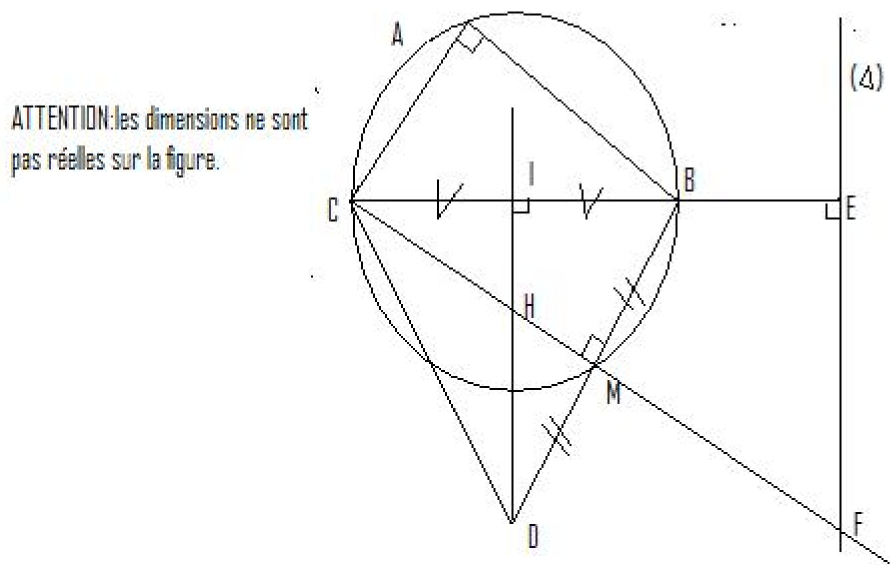
Ainsi $BH = BM \times \frac{BM}{AB}$ d'ou

$$BH = \frac{BM^2}{AB}$$

4)Donnons la nature du triangle AEF
On a $(EF)\|(IM)$ donc les triangles AEF et AMI sont en position de THALES.
donc $\frac{AE}{AM} = \frac{AF}{AI} = \frac{EF}{IM}$
Ainsi on a $AF = \frac{AE\times AI}{AM} = \frac{3\times 4}{4} = 3cm$ d'ou $AF = 3cm$ De même $EF = 3cm$
donc $AE = AF = EF = 3cm$ d'ou AEF est un triangle équilatéral.

15.8.2 Corrigé Exercice 2 :B.F.E.M 2002

1)constriction



2)Démontrons le triangle ABC est rectangle.
on a ABC un triangle et $AB = 4$,$AC = 3$ et $BC = 5$ d'ou $BC^2 = 25$ et $AB^2 + AC^2 = 16 + 9 = 25$ donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$
or d'aprés la reciproque du théorème de PYTHAGORE
donc ABC est un triangle rectangle en B.
3-a)Calculons DI
on a BCD est un triangle équilatéral. or dans un triangle équilatéral la hateur issue d'un sommet est à la fois la médiatrice du coté ooposé à ce sommet,la bissectrice bissectrice de l'angle et la médiane.
donc (DI) est la médiane issue du sommet D d'ou I est le milieu de $[BC]$
d'autre part ADI est un triangle rectangle en I
D'aprés le théorème de PYTHAGORE on aura $BD^2 = DI^2 + IB^2$ d'ou $DI^2 = BD^2 - IB^2$
A.N $DI^2 = 5^2 - (\frac{5}{2})^2 = 25 - \frac{25}{4} = \frac{75}{4}$ d'ou $DI = \sqrt{\frac{75}{4}}$

$$DI = \frac{5\sqrt{3}}{2}cm$$

3-b)Calculons l'aire du triangle BCD
$Aire_{BCD} = \frac{DI \times BC}{2}$
A.N :$Aire_{BCD} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2} \times 5}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

$$Aire_{BCD} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

4)Démontons que M est le milieu de $[BD]$
On a M appartient au cercle donc $\widehat{CMA}$ est un angle droit.
d'ou (CM) est la hauteur issue de C.
Puisque BCD est un triangle équilatéral.
donc (CM) est aussi la médiane issue de C d'ou M est le milieu de $[BD]$.
5)Démontrons que $CH = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ puis calculons CF.
on a (DI) et (CM) sont les médianes issue respectivement aux points D et (C) du triangle équilatéral BCD
Donc $CM = DI = \frac{5\sqrt{3}}{2}$
De plus H est le point d'intersection des deux médianes.
d'ou H est le centre de gravité du triangle BCD.donc $CH = \frac{2}{3}CM$.
A.N : $CH = \frac{2}{3} \times \frac{5\sqrt{3}}{2}$ d'ou

$$CH = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Calculons CF.
on a $(\Delta)\perp(BC)$ d'ou $(EF)\perp(BC)$ et $(HI)\perp(BC)$
or si deux droites sont perpendiculaire à une même droite dans le plan alors elles sont parallèles.Donc

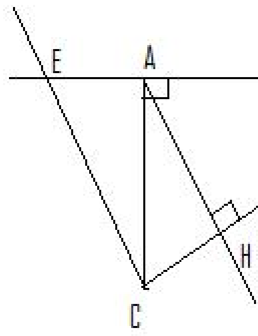
$$(EF)\|(HI)$$

Ainsi on a les triangles CHI et CFE sont en position de THALES donc $\frac{CI}{CE} = \frac{CH}{CF}$ d'ou $CF = \frac{CH \times CE}{CI}$ or $CE = CB + BE = 5 + \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$, $CI = \frac{5}{2}$
A.N : $CF = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{3} \times \frac{15}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{25\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{5}$ d'ou

$$CF = 5\sqrt{3}$$

15.8.3 Corrigé Exercice 3 :B.F.E.M 1997

1)La figure



Calculons BC
ABC est un triangle rectangle en A d"'aprés le théorème de PYTHAGORE on a $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 64 + 16 = 80$ $BC = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ donc

$$BC = 4\sqrt{5}cm$$

2)Calculons BH,CH, AH
on a $AB^2 = BH \times BC$ donc $BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{64}{4\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{5}$

$$BH = \frac{16\sqrt{5}}{5}cm$$

$AC^2 = CH \times BC$ donc $CH = \frac{AC^2}{BC} = \frac{16}{4\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

$$CH = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

on sait que $AH^2 = CH \times BH = \frac{16\sqrt{5}}{5} \times \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{64}{5}$ d'ou $AH = \sqrt{\frac{64}{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$

$$AH = \frac{8\sqrt{5}}{5}cm$$

3)Calculons AE puis en déduisons EC
On a $AE = BE - AB$
d'autre part $(CE)\|(AH)$ donc les triangles BAH et AEC sont en position de THALES
Donc $\frac{AB}{BE} = \frac{BH}{BC}$ d'ou $BE = \frac{AB \times BC}{BH} = \frac{8 \times 4\sqrt{5}}{\frac{16\sqrt{5}}{5}}$ $BE = 10cm$ donc $AE = 10-8 = 2$

$$AE = 2cm$$

Déduisons CE
On a AEC est un triangle rectangle en A d'aprés le théorème de PYTHAGORE on a $CE^2 = AE^2 + AC^2 = 4 + 16 = 20$ d'ou $CE = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

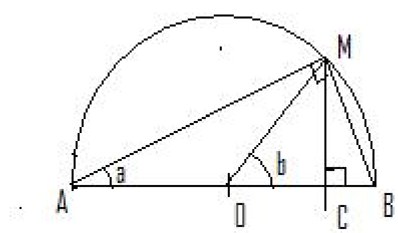
$$CE = 2\sqrt{5}cm$$

4)Calculons $\sin \widehat{E}$
$\sin \widehat{E} = \frac{AC}{CE} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\sin \widehat{E} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

15.8.4 Corrigé Exercice 4 :B.F.E.M 2004

1)constriction



Donnons la nature du triangle AMB
on a ς un cercle de diamètre $[AB]$ et $M \in \varsigma$
or tout point sur un cercle voit son diamètre sous un angle droit.
donc $\widehat{AMB}$ est un angle droit d'ou AMB est un triangle rectangle en M
2-a)Donnons deux expréssions de $\cos a$
Dans le triangle rectangle AMB $\cos a = \frac{AM}{AB}$
Dans le triangle rectangle AMC rectangle en C $\cos a = \frac{AC}{AM}$
2-b)Déduisons en que $AC = AM \times \cos a$ et $AM^2 = AB \times AC$
On a $\cos a = \frac{AC}{AM}$ donc

$$AC = AM \times \cos a$$

on a $\cos a = \frac{AM}{AB}$ et $\cos a = \frac{AC}{AM}$ donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AC}{AM}$ d'ou $AM \times AM = AB \times AC$ d'ou

$$AM^2 = AB \times AC$$

2-c)Exprimons OC en fonction de $\cos b$
on a OCM est un triangle rectangle en C donc $\cos b = \frac{OC}{OM}$ donc

$$OC = OM \times \cos b$$

Déduisons que $AC = r(1 + \cos b)$
on a $AC = AO + OC$ donc $AC = AO + OM \times \cos b$ or $AO = OM = r$ donc $AC = r + r \times \cos b = r(1 + \cos b)$

$$AC = r(1 + \cos b)$$

2-d)Déduisons des questions précedents $\cos^2 = \frac{1+\cos b}{2}$
on a $\cos a = \frac{AC}{AM}$ et $\cos a = \frac{AM}{AB}$ donc $\cos a \times \cos a = \frac{AC}{AM} \times \frac{AM}{AB}$
donc $\cos^2 a = \frac{AC}{AB}$ or $AC = r(1 + \cos b)$ et $AB = 2r$ d'ou $\cos^2 a = \frac{r(1+\cos b)}{2r}$ donc

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos b}{2}$$

15.8.5 Corrigé Exercice 5 :B.F.E.M 2000

1)Calculons la longueur de l'echelle AC
On a $\cos 72 = \frac{BC}{AC}$ donc $AC = \frac{BC}{\cos 72} = \frac{1{,}5}{0{,}3} = 5m$

$$AC = 5m$$

2)Déterminons la hauteur AB
ABC est un triangle rectangle en B d'aprés le théoreme de PYTHAGORE on a $AC^2 = AB^2 + BC^2$ d'ou $AB^2 = AC^2 - BC^2 = 25 - 2,25 = 22,75$ donc $AB = \sqrt{22,75}$ $AB = 4,76$

$$AB = 4,8$$

15.9 Correction Exercice sur Espace

15.9.1 Corrigé Exercice 1 :B.F.E.M 2000

1)Calculons $O'A'$
on a $(o'A')\|(OA)$ donc les triangle $SO'A'$ et SOA sont en position de THALES et O' milieu de $[SO]$ donc $\frac{O'A'}{OA} = \frac{SO'}{SO} = \frac{1}{2}$
$\frac{O'A'}{OA} = \frac{1}{2}$ d'ou $O'A' = OA \times \frac{1}{2}$ or $OA = 2a$ donc $O'A' = 2a \times \frac{1}{2}$ d'ou

$$O'A' = a$$

2-a)Calculons le volume du cône initial.
$V_{initial} = \frac{1}{3} \times B \times h$ or $B = \pi r^2 = 3,14 \times (2\sqrt{3})^2 = 3,14 \times 12 = 37,68$ et $h = 2\sqrt{13} = 2 \times 3,6 = 7,2$
$V_{initial} = \frac{1}{3} \times 37,68 \times 7,2 = 90,432$

$$V_{initial} = 90,432$$

2-b)Calculons le volume du cône réduit
soit $k = \frac{1}{2}$ le coefficient de réduction donc $V_{reduit} = k^3 \times V_{initial}$
A.N :$V_{reduit} = (\frac{1}{2})^3 \times 90,432$

$$V_{reduit} = 11,304$$

Déduisons le volume du seau
$V_{seau} = V_{initial} - V_{reduit} = 90,432 - 11,304 = 79,128$

$$V_{seau} = 79,13$$

15.9.2 Corrigé Exercice 2 :B.F.E.M 2005

1)Calculons le volume du cône
$V_c = \frac{1}{3}B \times h$ or $B = \pi r^2 = 10^2\pi = 100\pi$ et $h = 10$ $V_c = \frac{1}{3} \times 100\pi \times 10 = \frac{1000}{3}\pi$ prenons $\pi = 3,14$ donc

$$V_c = 1046,66cm^3$$

2)Calculons la dépense minimal
calculons d'abord l'aire latéral du cône.
$A_l = \pi g \times r$ avec $g = SI$ or SIH est un triangle rectangle en H d'aprés le théorème de PYTHAGORE $SI^2 = IH^2 + SH^2 = 100 + 100 = 200$ d'ou $SI = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ donc $g = SI = 10\sqrt{2}$
donc $A_l = \pi \times 10\sqrt{2} \times 10$ d'ou $A_l = 444,06cm^2$
on a $100cm^2 \longrightarrow 1000F$
$444,06cm^2 \longrightarrow depense$
donc $depense = \frac{444,06 \times 1000}{100} = 4440,6$
d'ou la dépense minimale est de 4440F.

15.9.3 Corrigé Exercice 3 :B.F.E.M 2004

1)Montrons que le rayon $r = 4$ et la hauteur $h = 2\sqrt{5}$
On sait que $r = l \times \frac{\alpha}{360}$ or $\alpha = 360 - 120 = 240$ et $l = 6$

d'ou $r = 6 \times \frac{240}{360} = 4$

$$r = 4$$

Soit S le sommet du cône et A un point appartenant au cercle de base et O le centre de la base.
Ainsi on aura SOA est un triangle rectangle en O or d'aprés le théorème de PYTHAGORE on a $SA^2 = SO^2 + OA^2$ d'ou $SO^2 = SA^2 - OA^2$ or $OA = r = 4$ et $SA = l = 6$ donc $SO^2 = 36 - 16 = 20$ $SO = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ d'ou

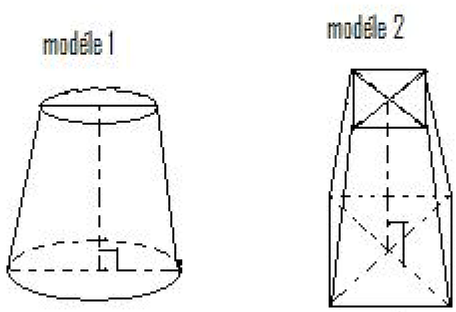
$$h = 2\sqrt{5}$$

2)Calculons son volume
$V_c = \frac{1}{3}B \times h$ d'ou $V_c = \frac{1}{3} \times 4^2\pi \times 2\sqrt{5} = \frac{32\pi\sqrt{5}}{3}$

$$V_c = \frac{32\pi\sqrt{5}}{3}cm^3$$

15.9.4 Corrigé Exercice 4 :B.F.E.M 2003

1)représentation des deux modéles



2)Pour l'aider à son choix,Calculons le volume de chaque modéle
Modéle 1
$V_{tronc\ cone} = V_{initial} - V_{reduit}$ or $V_{reduit} = k^3 \times V_{initial}$ or $k = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$
$h_{initial} = 2h = 2 \times 50 = 100cm$ donc $V_{initial} = \frac{1}{3} \times 20^2\pi \times 100 = \frac{40000\pi}{3}$
$V_{reduit} = (\frac{1}{2})^3 \times \frac{40000\pi}{3} = \frac{40000\pi}{24}$
$V_{tronccone} = \frac{40000\pi}{3} - \frac{40000\pi}{24} = \frac{320000\pi - 40000\pi}{24} = \frac{280000\pi}{24} = \frac{35000\pi}{3}$

$$V_{tronc\ cone} = \frac{35000\pi}{3}$$

Modéle 2
$V_{tronc\ pyra} = V_{initial} - V_{reduit}$ or $V_{reduit} = k^3 \times V_{initial}$ or $k = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$
$h_{initial} = 2h = 2 \times 50 = 100cm$ donc $V_{initial} = \frac{1}{3} \times 40^2 \times 100 = \frac{160000}{3}$
$V_{reduit} = (\frac{1}{2})^3 \times \frac{160000}{3} = \frac{20000}{3}$
$V_{troncpyra} = \frac{160000}{3} - \frac{20000}{3} = \frac{140000}{3}$

$$V_{tronc\ pyra} = \frac{140000}{3}$$

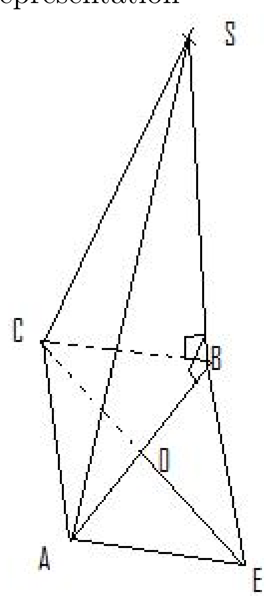
on a $\frac{V_{tronc,\ cone}}{V_{tronc\ pyra}} = \frac{\frac{35000\pi}{3}}{\frac{140000}{3}} = \frac{\pi}{4}$ donc $\frac{V_{tronc\ cone}}{V_{tronc\ pyra}} \prec 1$ d'ou

$$V_{tronc\ cone} \prec V_{tronc\ pyra}$$

Ainsi **le modéle 1** est moins volumineux que le **modéle 2** donc l'entreprise devra choisir **le modéle 1**.

15.9.5 Corrigé Exercice 5 :B.F.E.M 2006

1)représentation



2-a)Calculons SA et SC
On a $(SB) \| (AB)$ d'ou ABS est un triangle rectangle en B or d'aprés le théoréme de PYTHAGORE on a $SA^2 = SB^2 + AB^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$
$SA = \sqrt{100} = 10$

$$SA = 10cm$$

Pour les même raison on aura $SC^2 = SB^2 + BC^2$ De plus on a $ACBE$ est un losange donc $(AB)\perp(CE)$ d'ou BOC est un triangle rectangle O ,en plus O est à la fois milieu de $[CE]$ et $[AB]$.$BC^2 = OB^2 + OC^{=}3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45$ donc $BC^2 = 45$
Ainsi $SC^2 = SB^2 + BC^2 = 64 + 45 = 109$

$$SC = \sqrt{109}$$

2-b)Montrons que l'aire de ABC est $18cm^2$
on a $A_{ire} = \frac{OB \times AB}{2}$ or $OB = \frac{12}{2} = 6cm$ $A_{ire} = \frac{6\times 6}{2} = 18$ donc

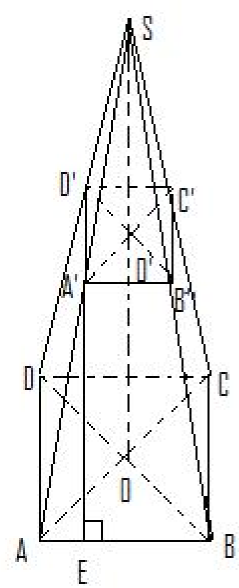
$$A_{ire} = 18cm^2$$

2-c)Calculons le volume de $SABC$
$V_{SABC} = \frac{1}{3} \times A_{ire} \times SB$ d'ou $V_{SABC} = \frac{1}{3} \times 18 \times 8 = 48$

$$V_{SABC} = 48cm^3$$

15.9.6 Corrigé Exercice 6 :B.F.E.M 2009

1)Représentation



1-a)Montons que la hauteur de la pyramide initiale $SO = 45$ et celle de la pyramide réduite $SO' = 30$
on sait que le plan $(A'B'C'D')$ est paralléle au plan $(ABCD)$ d'ou $(SO')\|(SO)$ et $(A'B')\|(AB)$
D'une part les triangles $SA'O'$ et SAO sont en position de THALES.donc $\frac{SA'}{SA} = \frac{SO'}{SO}$ (1)
D'autre part les triangles $SA'B'$ et SAB sont en position de THALES. donc $\frac{SA'}{SA} = \frac{A'B'}{AB}$ (2)
(1) et (2) entrainent $\frac{SO'}{SO} = \frac{A'B'}{AB}$ d'ou $\frac{SO'}{SO} = \frac{80}{240}$ ssi $\frac{SO'}{SO} = \frac{1}{3}$ or $SO = SO'+O'O$ donc $SO' = SO - O'O$ or $O'O = 30$ d'ou $SO' = SO - 30$
Ainsi on aura $\frac{SO-30}{SO} = \frac{1}{3}$ ssi $3SO-90 = SO$ ssi $3SO-SO = 90$ ssi $2SO = 90$ ssi $SO = \frac{90}{2} = 45$

$$SO = 45$$

on a $SO' = SO - 30 = 45 - 30 = 15$

$$SO' = 15cm$$

1-b)Calculons le volume du récipient
$V_{recipient} = V_{initial} - V_{reduit}$ or $V_{initial} = \frac{1}{3} \times 240^2 \times 45 = 864000$ et $V_{reduit} = \frac{1}{3} \times 80^2 \times 15 = 32000$
$V_{recipient} = 864000 - 32000 = 832000$

$$V_{recipient} = 832000cm^3$$

2-a)Montrons que la hauteur de ces trapèzes est égal à $10\sqrt{73}$ ou $A'E = 10\sqrt{73}$
On a $AA'E$ un triangle rectangle en E donc $A'A^2 = A'E^2 + EA^2$ d'ou $A'E^2 = A'A^2 - EA^2$

$$A'A = SA - SA'(1)$$

Dans le triangle rectangle $SA'O'$,$SA'^2 = SO'^2 + A'O'^2 = 15^2 + (40\sqrt{2})^2 = 225 + 3200 = 3425$ d'ou $SA' = 5\sqrt{137}$
De plus $SA' = \frac{1}{3}SA$ d'ou $3SA' = SA$
Dans (1) $A'A = 3SA' - SA = 2SA' = 2 \times 5\sqrt{137} = 10\sqrt{137}$ d'ou

$$A'A = 10\sqrt{137}$$

D'autre part $EA = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3} \times 240 = 80$

$$EA = 80$$

Ainsi $A'E^2 = (10\sqrt{137})^2 - 80^2 = 13700 - 6400 = 7300$ d'ou $A'E = \sqrt{7300}$

$$A'E = 10\sqrt{73}$$

2-b)Calculons l'aire latérale de récipient.
$A_{recipient} = 4A_{trapeze}$ or $A_{trapeze} = \frac{1}{2} \times (A'B' + AB) \times A'E$
$A_{trapeze} = \frac{1}{2} \times (80 + 240) \times 10\sqrt{73}$

$$A_{trapeze} = 1600\sqrt{73}cm^2$$

donc $A_{recipient} = 4 \times 1600\sqrt{73} = 6400\sqrt{73}cm^2$

$$A_{recipient} = 6400\sqrt{73}cm^2$$

15.9.7 Corrigé Exercice 7 :B.F.E.M 2010

1)Justifions que la circonférence de sa base est 54π
on a $360 \longrightarrow 2SA\pi$(à la circoférence de l'angle de 360)
donc $270 \longrightarrow p$
d'ou $p = \frac{270\times 2SA\pi}{360} = \frac{270\times 2\times 36\pi}{360} = \frac{540\pi}{10} = 54\pi$ d'ou

$$p = 54\pi$$

2)Montrons le rayon de la base est de $r = 27cm$
On sait que $p = 2r\pi$ donc $r = \frac{p}{2\pi} = \frac{54\pi}{2\pi} = 27$

$$r = 27cm$$

3)Justifions que la hauteur de ce cône est égal à $9\sqrt{7}$
Soit O le centre du cercle de base. donc SO est la hauteur du cône.
d'ou SAO est un triangle rectangle en O.or d'aprés le théorème de PYTHAGORE
on a $SA^2 = SO^2 + OA^2$ d'ou $SO^2 = SA^2 - OA^2 = 36^2 - 27^2 = 1296 - 729 = 567$ donc $SO = \sqrt{567} = \sqrt{81 \times 7}$

$$SO = 9\sqrt{7}$$

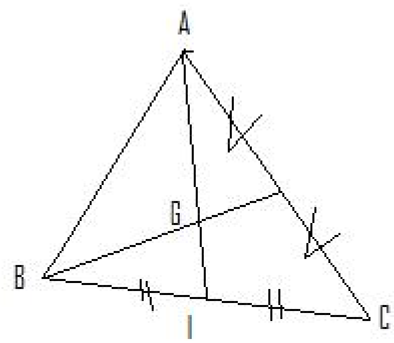
4)Calculons l'aire de la surface totale du cône
on sait que $A_{total} = A_{base} + A_{lateral} = \pi r^2 + \pi SA \times r$ donc $A_{total} = 27^2\pi + 36 \times 27\pi = 729\pi + 972\pi = 1701\pi$ or $\pi = 3,14$

$$A_{totale} = 5341,14cm^2$$

15.10 Correction des Exercices sur les Vecteurs

15.10.1 Corrigé Exercice 1 :B.F.E.M 2003

1)constriction



2)Démontrons que pour tout point M du plan ,$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$
on a $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$
d'aprés la relation de CHALES on a
$\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MC}=\vec{O}$
$3\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{O}$
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{O}-3\overrightarrow{GM}$
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=-3\overrightarrow{GM}$
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

15.10.2 Corrigé Exercice 2 :B.F.E.M 2010

1-a)Montrons que $7AB+3BC=216$
on a $AB+AC+BC=72$ (1) en plus $4AB=3AC$ d'ou $AC=\frac{4}{3}AB$
Dans remplaçons AC par sa valeur donc on aura $AB+\frac{4}{3}AB+BC=72$ ssi $\frac{3AB+4AB+3BC}{3}=72$ d'ou $7AB+3BC=3\times 72$

$$7AB+3BC=216$$

1-b)Montrons que $3BC-5AB=0$
on sait que ABC est un triangle rectangle en A.or d'aprés le théorème de PYTHAGORE
on a $BC^2=AB^2+AC^2$ or $AC=\frac{4}{3}AB$ donc $AC^2=\frac{16}{9}AB^2$

Ainsi $BC^2 = AB^2 + \frac{16}{9}AB^2 = \frac{9AB^2+16AB^2}{9} = \frac{25AB^2}{9}, BC^2 = \frac{25AB^2}{9}$
donc $BC = \sqrt{\frac{25AB^2}{9}} = \frac{5AB}{3}$ d'ou $3BC = 5AB$

$$3BC - 5AB = 0$$

2)Calculons AB et BC
on a $7AB + 3BC = 216$ (1) et $3BC - 5AB = 0$ (2)
(1)-(2) donne $12AB = 216$ (attention on fait la difference membre à membre)
donc $AB = \frac{216}{12} = 18$ dans (2) $BC = \frac{5AB}{3} = \frac{5\times18}{3} = 30$

$$AB = 18 \ \ et \ \ BC = 30$$

D'eduisons AC
on a $AC = \frac{4}{3}AB = \frac{4}{3} \times 18 = 24$

$$AC = 24$$

15.11 Correction des Exercices sur le Repérage

15.11.1 Corrigé Exercice 1 :B.F.E.M 1997

1)Donnons les coordonnés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$
$A(-4;4)$ $B(-9;-6)$ $C(1;-1)$ et $D(6;9)$
$\overrightarrow{AB}(-9 - -4; -6 - 4)$ donc

$$\overrightarrow{AB}(-5;-10)$$

$\overrightarrow{DC}(1-6;-1-9)$ donc

$$\overrightarrow{DC}(-5;-10)$$

Determinons la nature de ABC
on a $\overrightarrow{AB}(-5;-10)$;$\overrightarrow{AC}(5;-5)$;$\overrightarrow{BC}(10;5)$
ona :$AB = \sqrt{(-5)^2 + (-10)^2} = \sqrt{125}$;$BC = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125}$ donc $AB = BC$ d'ou ABC est un triangle isocèle en B
2)Donnons la nature de $ABCD$.
on a $\overrightarrow{AB}(-5;-10)$ et $\overrightarrow{DC}(-5;-10)$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
d'ou $ABCD$ est un parallelogramme
3)Montrons que $E(2;-8)$ est symetrie de A par rapport à (BC)

on a $E = S_{(BC)}(A)$ ssi (BC) est la médiatrice de $[AE]$ d'ou le milieu $[AE]$ appartient (BC) et $(BC) \perp (AE)$.
or $\overrightarrow{AE}(6;-12)$ et $\overrightarrow{BC}(10;5)$ $x_{AE} \times x_{BC} + y_{AE} \times y_{BC} = 6 \times 10 + (-12) \times 5 = 60 - 60 = 0$ donc $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BC}$ d'ou $(BC) \perp (AE)(1)$.
Soit I milieu de $[AE]$ donc $I(\frac{2+(-4)}{2}; \frac{4+(-8)}{2})$ d'ou $I(-1;-2)$
$\overrightarrow{BI}(8;4)$ et $\overrightarrow{BC}(10;5)$ on a $x_{BC} \times y_{BI} - x_{BI} \times y_{BC} = 10 \times 4 - 5 \times 8 = 40 - 40 = 0$ donc $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires
d'ou $I \in (BC)(2)$
Ainsi (1) et (2) montre que $E(2;-8)$ est le symetrie de A par rapport à (BC)

15.11.2 Corrigé Exercice 2 :B.F.E.M 2001

1)Calculons y pour les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient orthogonaux.
$A(-2;1)$;$B(4;3)$;$C(-1;y)$
$\overrightarrow{AB}(6;2)$ et $\overrightarrow{AC}(1;y-1)$ on a $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ si et seulement si $1 \times 6 + 2(y-1) = 0$ ssi $6 + 2y - 2 = 0$ $2y = -4$ ssi $y = \frac{-4}{2} = -2$

$$y = -2$$

2)Calculons les coordonnés D
Soit $D(x;y)$
on a $D = S_I(A)$ donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}$ or I milieu $[BC]$ donc $I(\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$
Ainsi $\overrightarrow{AI}(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2})$ et $\overrightarrow{ID}(x - \frac{3}{2}; y - \frac{1}{2})$ $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}$ si et seulement si $x - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$ et $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$
$x - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$ ssi $x = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = \frac{10}{2} = 5$, $x = 5$
$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ ssi $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$, $y = 0$ d'ou

$$D(5;0)$$

3)Montrons que $ABDC$ est un rectangle.
on sait que l'ordonné est -2 d'ou $(AB) \perp (AC)$.
D'autre part $\overrightarrow{AB}(6;2)$ et $\overrightarrow{CD}(5-(-1); 0-(-2))$ d'ou $\overrightarrow{CD}(6;2)$
donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ d'ou $ABDC$ est un parallélogramme.
on a $ABDC$ est un parallélogramme et $(AB) \perp (AC)$
or un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle.
donc $ABDC$ est un rectangle.

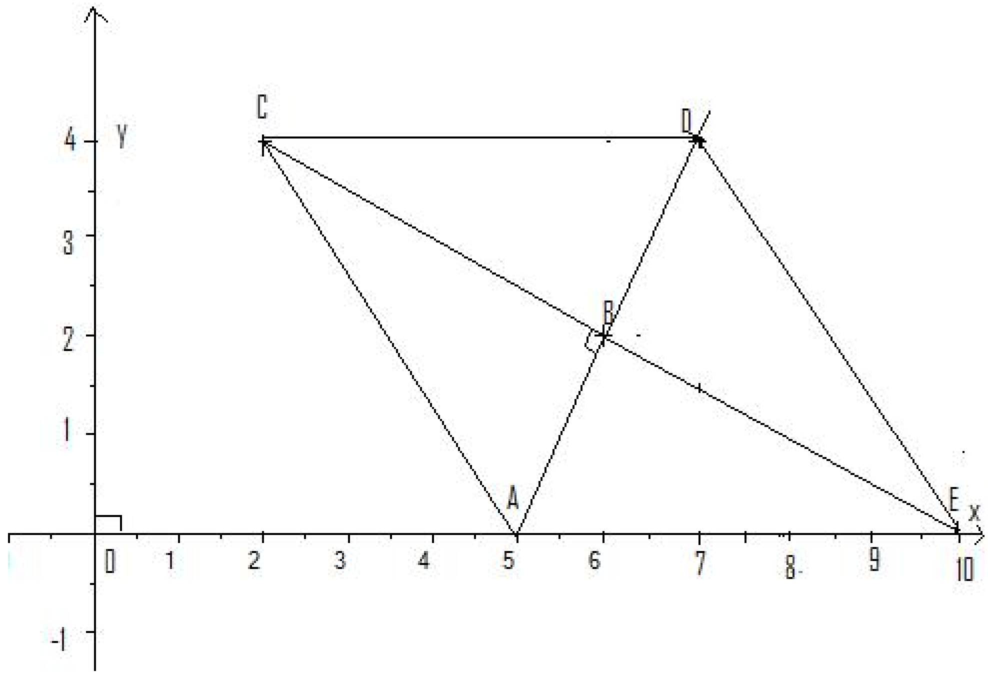
4)Montrons que A ;B ;D et C sont situé sur un méme cercle.
on sait que $ABDC$ est un rectangle d'ou ABC est un triangle rectangle en A d'un coté.
or Dans un triangle rectangle le centre du cercle circoncrit est milieu de hypothénuse.
Donc A ;B ;C appartiennent sur le cercle de centre I et de diamètre $[BC]$.
De même de l'autre coté D ;B ;C appartiennent sur le cercle de centre I et de diamètre $[BC]$.
Ainsi A ;B ;D et C sont situé sur un méme cercle de centre I
$r = AI = \sqrt{(\frac{7}{2})^2 + (\frac{-1}{2})^2} = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$
donc A ;B ;D et C sont situé sur le cercle de centre I et rayon $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$
5)Calculons les coordonnés du point E
on a $E = t_{\vec{u}}(A)$ donc $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$ soit $E(x; y)$ donc $\overrightarrow{AE}(x + 2; y - 1)$
$\vec{u} = \overrightarrow{AE}$ ssi $x + 2 = 1$ et $y - 1 = 7$ ssi $x = -1$ et $y = 8$ donc

$$E(-1; 8)$$

6)Démontrons que AEI est un triangle rectangle
On a $\overrightarrow{AI}(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2})$ et $\overrightarrow{AE}(1; 7)$ or $\frac{7}{2} \times 1 + 7 \times (-\frac{1}{2}) = \frac{7}{2} - \frac{7}{2} = 0$ donc $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{AE}$
d'ou $(AE) \perp (AI)$ donc AEI est un triangle rectangle en A.
D'eduisons la position de (AE) par rapport au cercle.
On a $(AE) \perp (AI)$ donc (AE) est la tangente du cercle sur lequel se trouvent A,B,C,D

15.11.3 Corrigé Exercice 3 :B.F.E.M 2009

1)Montrons que ABC est un triangle rectangle en B



$A(5;0)$,$B(6;2)$;$C(2;4)$
$\overrightarrow{BA}(-1;-2)$ et $\overrightarrow{BC}(-4;2)$.de plus $(-1)\times(-4)+(-2)\times 2=4-4=0$
donc $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BA}$ d'ou (BA) et (BC) sont perpendiculaire
donc ABC est un triagle rectangle en B.
2)Calculons les coordonnées de D
Soit $D(x;y)$,on a $\overrightarrow{AB}(1;2)$ et $\overrightarrow{BD}(x-6;y-2)$.
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$ si et seulement si $x-6=1$ et $y-2=2$ ssi $x=7$ et $y=4$ donc

$$D(7;4)$$

3)Calculons les coordonnées de E
Soit $E(x;y)$,$\overrightarrow{CB}(4;-2)$ et $\overrightarrow{BE}(x-6;y-2)$
or $E=S_{(B)}(C)$ d'ou $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BE}$ si et seulement si $x-6=4$ et $y-2=-2$
ssi $x=10$ et $y=0$

$$E(10;0)$$

4)Justifions que $ACDE$ est un losange.
on sait que $(AB)\perp(CB)$ d'ou $(AD)\perp(CE)$.De plus $\overrightarrow{AC}(-3;4)$ et $\overrightarrow{ED}(-3;4)$

donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{ED}$ d'ou $ACDE$ est un parallèlogramme.
Ainsi on a $ACDE$ est un parallèlogramme et $(AD)\perp(CE)$.
or un parallèlogramme qui a ses diagonales perpendiculaire est un losange.
donc $ACDE$ est un losange.
5)justifions que $F = t_{\overrightarrow{AD}}(E)$
$F = t_{\overrightarrow{AD}}(E)$ ssi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF}$ or $\overrightarrow{AD}(2;4)$ et $\overrightarrow{EF}(2;4)$ donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF}$ d'ou

$$F = t_{\overrightarrow{AD}}(E)$$

Bibliographie

[1] Ibrahima Sy :cours oraux de mathématique 3ième :2003-2004
[2] Monsieur Gueye :cours oraux de Mathématique 3ième :1996-1997
[3] M.CUAZ :statistique à une variable :http// :mathscyr.free.fr